introduction

le mathcamp 3 s'est tenu à Alger,le 5 aout 2017 , dans l'enceinte de l'école normale supérieure à KOUBA. l'événement a réuni plus d'une soixantaine de personnes entre étudiants et enseignants, et a duré 13 jours (du 5 au 17 aout). 12 jours de cours et de séminaires très variés, presque tous les thèmes on étais abordés, algèbre, géométrie,analyse, topologie...(presque tous sauf les probabilités).

les cours et séminaires :

il eut deux cours , un la première semaine dirigé par Mr.LABI en géométrie différentielle,et l'autre cours, étais un cours de physique mathématique, donné par Mr.MOUSSAOUI la seconde semaine.
c'est deux cours là ont occupé une bonne partie des matinées du camp, avec, occasionnellement un séminaire donné par un étudiant. la première semaine, les après-midis,Mr.AZZEDINE donna un cours sous forme de TDs en théorie des groupes,cours qui faisait très fortement participer les étudiants.
le deuxième semaine, les après-midis ont été occupés par ,la correction d'un sujet d'agrégation par Mehdi,sujet qui contient une preuve du théorème du plongement isométrique de NASH, et de la plus part des séminaire des étudiants .

restauration et hébergement :

le ministère de l'enseignement supérieurs prit en charge la restauration des participants durant toute la duré du camp, sauf le premier jour. et les étudiants participants furent hébergés à la cité universitaire de l'ENSTP à GARIDI.

Rapport sur le premier jour de math camp

Nous sommes le samedi 05 aout à 9:00 h du matin devant les portes de l'école normale supérieure , les participants arrivent l'un après l'autre , tout le monde est motivé et impatient pour commencer le math camp , après l'arrivée de tous les participants et les organisateurs nous allons vers la salle des conférences pour commencer l'ouverture , après quelque temps de patience qu'était une occasion pour les participants pour faire connaissance entre eux, nous commençons l'ouverture et c'était monsieur Mokraan qui prend la parole et commence à nous raconter les difficultés qu'ils ont pour améliorer le niveau des mathématiques en Algérie et la négligence totale des mathématique par l'état il raconte que dans les années quatre-vingt dix des mathématiciens algériens ont rencontré le président du comité international des mathématiques qui leur dit que le potentiel des chercheurs algériens en mathématiques est le même que celui de l'Espagne mais finalement le niveau en Espagne a progressé jusqu'en organisant le congrès international des mathématiques , par contre le niveau des mathématiques en Algérie recule.
Il déclare aussi les difficultés pour organiser ce math camp et remercie les organisateurs pour leurs efforts surhumains , et encourage les participants en disant que ce math camp est organisé spécialement pour aider l'élite et révolutionner le niveau,il nous dit aussi que copier directement l'expérience française ne va pas donner des fruits et l'échec des classes préparatoires et grandes écoles algériennes en mathématique revient au manque des professeurs qui sont capables d'enseigner à haut niveau et même que la majorité des docteurs ne peut réussir l'examen d'entrer aux grandes écoles françaises (école normale supérieure ,école polytechnique) .
Maintenant c'est monsieur Zeghib qui prend la parole et commence par remercier les organisateurs spécialement monsieur abu bakr khaled saadllah , comme il remercie monsieur Ainouz surtout pour la pause café, et commence son discours en commençant de nous citer quelques exemples sur des algériens qu'il ont obtenu des bourses d'excellence et réussi à l'étranger il commence par hacen zelaci qui prépare actuellement un doctorat à l'université de Nice en géométrie algébrique, et Blidiya qui aimait la cryptographie mais monsieur zeghib a réussi à le convaincre de commencer par faire un parcours en géométrie algébrique appliquées et il est actuellement à Nice et va préparer un doctorat . comme il nous cite l'exemple de Bilel et Haron qui sont parmi nous et sur les portes de préparer un doctorat à l'Université de Nice en EDP .
Après avoir cité ces exemples monsieur Zeghib commence à faire une comparaison entre le niveau des mathématiques entre l'Algérie, la Tunisie , l'Arabie Saoudite , le Maroc et la France , il nous a rapporté la réussite du système français qui se base sur les classes préparatoires , les grandes écoles , et l'agrégation et insiste sur la nécessité d'inspirer de l'expérience française ; nous passons au

Maroc et la Tunisie qui sont un exemple de pays qui a inspiré de l'expérience française et réussi parfois même a accéder les grandes écoles par le concours grâce à la bonne qualité de l'enseignement dans leurs écoles préparatoires qui procèdent aux mêmes examens qu'en France . Nous nous demandons la place de l'Algérie et pourquoi elle n'a pas copié l'expérience française correctement comme le Maroc et la Tunisie , on termine la comparaison par l'arabie saoudite qui semble bon en statistiques mais son véritable niveau est faible . un des présents qui est un professeur nous propose de chercher d'autres méthodes pour améliorer le niveau en dehors de l'agrégation il nous raconte que les étudiants chinois à l'école polytechnique se moquent du niveau des polytechniciens français en mathématique et le considèrent comme faible.
Après les longs dialogues et discussions, nous terminons l'ouverture vers 11:00H ,monsieur Makkaoui nous propose d'aller vers le laboratoire des EDP pour commencer les cours parce-que c'est climatisé , tout le monde est content parce-qu'il fait vraiment chaud,mais d'abord nous commençons par la pause café (ou plutôt comme quelques participants l'appellent pause thé) .
nous allons vers le laboratoire des EDP et monsieur Larbi (de l'université d'Al manama) commence ses conférences sur les surfaces, monsieur Zeghib nous raconte quelques souvenirs avec monsieur Larbie et comment ses conférences attirent toujours l'attention du public ,monsieur Mehdi exige à tous les participants d'écrire les cours. le support des cours est écrit en anglais mais le professeur explique en arabe , français et anglais. la première chose le professeur nous a donné le plan des cours suivant:

1. Topological sufaces
2. Smooth surfaces
3. 1st Fundamental form
4. 2nd Fundamental form
5. (a) Gauss's Egregiam theorem
   (b) Gauss Bonnet theorem

on a commencé par faire des rappels sur la définition d'une topologie ,donné quelques exemples usuels (la topologie de $\Re^n$,la topologie induite) , on a passé après à la définition d'une fonction continue sur un espace topologique, et après on a définit un espace compacte , et le professeur nous a laissé quelques exercices classiques :

- if X is compact and hassdroff and $F \subset X$ then F is compact iff F^c is open
  all compact subset of R^n are boended

on passé après ou théorème de Heine-Borel (les compactes de $\Re^n$ sont les fermés bornés) , le professeur se rappelle d'un exercice et il l'écrit au tableau : if $F : X \longrightarrow Y$ is continous and bijective and if X is compact hassdrof then F is homeomerphism et soudain monsieur Mehdi intervient avec un bon exercice : soit $f : V \subset \Re^n \longrightarrow \Re^n$ on suppose que f est continue et bijective, monter que f est un homéomorphisme.
Ensuite, nous sommes passé aux les surfaces topologiques , on a commencé par la définition : A Topoligical surface is a haussdroft topologicql space X such that $\forall \in X, \exists V_a$ open ix X with $a \in V_a$ and V_a is homeomorphic to an open set

of $\Re^2$.
Et naturellement on passe à la définition d'une carte locale et d'un atlas :
A surface X come then with a collection of open sets $(W_i)_{i\in I}$ of X and homeomerphisms $F_i : U_i \longrightarrow W_i$ wher $U_i \subset \Re^2$ (U_i open) (U_i, F_i) is called a surface patch.
the collection $(U_i, F_i)_{i\in I}$ is called an atlas of X if $U_{i i\in I}$ cover X
on a fait une remarque naturelle : if X is a sufrace and Y is homeomorphic to X , then X is a surface .
après on est passé à quelques exemples :

- tous les plans sont homéomorphes au plan XY
  la sphère S^2 est une surface topologique parce-que si on définit le pôle Nord $N = (0, 0, 1)$ et le pôle sud $S = (0, 0, -1)$ on aura chaqu'un de $S^2 - N$ et $S^2 - S$ et homéomorphe au $\Re^2$ par la projection stéréographique et couvrent S^2

Vers 13:00h c'est monsieur Saadllah qui nous annonce la fin de la séance et qu'il faut partir manger au restaurant populaire Abdessalem prés de l'ENS avec un menu au choix et libre, avec à la fin un plat de poulet pour tous le monde . après avoir mangé nous retournons vers l'Ens pour reprendre les cours ver 14:15 .

MATH CAMP D'ALGER

Rapport du 3e jour de la 1ère semaine du Lundi 07 aout 2017

Deux jours après le commencement du camp, les étudiants sont toujours désireux d'apprendre et de découvrir davantage sur la Théorie des surfaces.

Avant 09h00 : Elaboration du programme de la journée

Le matin même de cette 3^{eme} journée, tout le monde était en salle à l'exception de Mehdi le retardataire du groupe.

Nous entamons la séance avec le programme de la journée en se basant sur les suggestions des étudiants participants ainsi que les professeurs.

En gardant le même rythme que les deux jours précédents, le commencement était par un cours sur les surfaces fournit par monsieur Larbi le matin et les séries d'exercices de monsieur Azzedine le soir.

De 09h00 à 11h00 : Travaux pratiques

Comme convenu lors de la journée du 06/08 à la demande de monsieur Zeghib, Mohamed Mekaoui, a apporté du scotch et du papier pour faire des travaux pratiques dans le but de voir le résultat d'un collage ou d'une déchirure de surface.

La chose la plus marquante de ces exercices, était la demande M. Zeghib, celle de visualiser les changements et d'essayer d'anticiper les résultats de ces dernières.

Exercice 1 :

Lors du lancement des travaux pratiques, Mohamed a commencé à coller une bande de papier rectangulaire en superposant les deux extrémités.

Résultat 1 : cylindre

Exercice 2 :

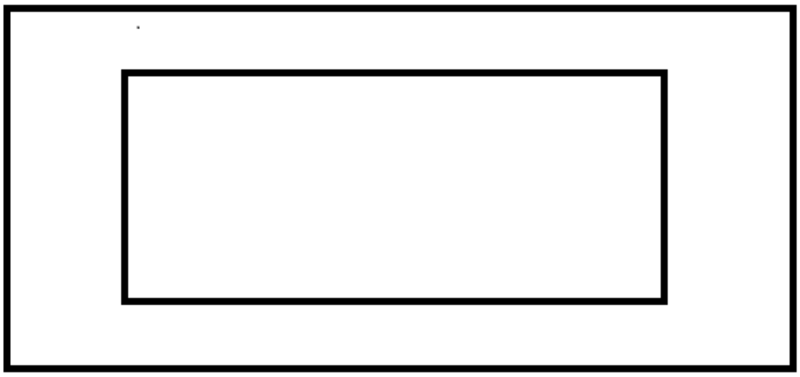
Une bande de papier rectangulaire (toujours de la même dimension) dont l'une des 4 extrémités (4') a été retournée avant d'être collée aux deux autres (1' et 2') qui ont-elles aussi été retournées. (voir l'exemple)

Résultat 2 : Bande de Möbius

' : feuille retournée

Par la suite M. Zhegib a intervenu pour nous parler de l'orientation des surfaces, en traçant des lignes continues de couleurs différentes sur le coté supérieur et inférieur de les formes obtenues.
Pour mieux comprendre cette notion d'orientation, le cylindre est orientable contrairement à la Bande de Möbius.
Mohamed Mekkaoui a continué et fait plusieurs expériences :

- Cylindre coupé au milieu » 2 cylindres
- Bande de Mobius coupé au milieu » cylindre noué
- Cylindre noué coupé au milieu » 2 cylindres entrelacés
- 1 cylindre collé à une Bande de Mobius » rectangle éventré (voir schéma ci-dessous)
- 2 Bandes de Mobius collées » rectangle éventré (voir schéma ci-dessous)
- 2 cylindres collés verticalement » rectangle éventré (voir schéma ci-dessous)



D'autres exercices ont été réalisés jusqu'à 11h00.
11h00 : pause café
11h20 a 13h10 : Cours des surfaces
Après la pause café, M. Larbi a commencé son cours assuré en anglais sur les surfaces où nous avons discuté des nouveaux concepts et définitions accompagnés de nombreux exemples et exercices.
Voici les définitions, théorèmes, exemples et exercices en anglais tels la version originale.
Nous présentons la suite de la première partie du cours (assuré lors des deux premiers jours du math camp) dont (un théorème et un exercice).

I. Classification theorem : (suite)
A compact connected surface is either homeomorphie to a sphere, a connected sun of tore or to a connected sum of production planes.

Exercise:

- $\mathbb{R}^n$ is not homeomorphic to $\mathbb{R}^p$ if $n \neq p$.
- $\mathbb{R}$ is not not homeomorphic to $\mathbb{R}^p$ if p>1
- $\mathbb{R}^2$ is not not homeomorphic to $\mathbb{R}^p$ if p>2
- $\mathbb{R}^3$ is not not homeomorphic to $\mathbb{R}^p$ if p>3

Ainsi nous avons clôturé la première partie de l'étude des surfaces, et comme prévu selon le sommaire du cours, M. Larbi a entamé la seconde partie à savoir Les surfaces lisses.

II. Smooth surfaces .

Definition (a):
Let S a topological surface and let : $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \cap W$ An homeomorphism (where U an open set of $\mathbb{R}^2$ and W an open set of $\mathbb{R}^3$) $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$
We say that f is a regular surface patch if f is a smooth (f_1, f_2 and f_3 have continues partial derivatives up to any others) and the victors f_u and f_v are linearly independent $\forall u \in U$ and $\forall v \in U$.

Definition (b):
S is a smooth surface if S can be covered by regular surface patches Example 1:
$h : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, a smooth map graph of $h = \{(x, y, h(x, y)) | (x, y) \in U\}$ is a smooth surface in fact
$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ is an homeomorphism onto it's image (exercise) .

Exercise:
let S={(x,y,z) | f(x,y,z) = k } , where $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function k is constant . We assume that $\nabla f \neq (0,0,0)$, $\forall (x, y, z) \in U$.
Show that f is a smooth surface (implicit function theorem) .

Example 2: Revolutional surfaces
a point (a,b,0) on the curve gives rise to the circle $(a, bcos(\theta), bsin(\theta))$,$0 \leq \theta \leq 2\pi$.
So a point (a,b,c) belongs to the surface of revolution if and only if $(a, \sqrt{b^2 + c^2})$ belongs to the curve .
so the surface is given by the equation $f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = k$.

Exercise:
complet the ptoof that S is a smooth surface.

Example 3: (a non exemple)
$U = (-\pi, \pi) X (0, 1)$, f(u,v)=(sin(u),sin(2u),v) .
show that f is smooth and $\{f_u, f_v\}$69 are lin ind , but f is not an homeomerphism onto it's image .

13h10 : pause déjeuner .
Le jeune Khaled interrompt la séance pour inviter tout le monde à prendre part au déjeuner.

Mathcomp3 from 05 to 17 august 2017
Report of the first week , the fifth day , the afternoon
Wednesday, 09 August 2017
Created by : Amir Djamel Eddine

NB : I let the morning report's details to its responsible .
At 14 o'clock, and before Haouari began his presentation titled : "Quadratic Surfaces" , Haouari and professor Zeghib , who was holding a cup of tea , discussed with us how to obtain the cup's form and the position of the line which indicates the half of its volume.
Haouari began by writing this equation :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0...\bigstar$$

with (A,B,C,D,E,F)$\neq (0,0,0,0,0,0)$

which is the cartesien equation of quadratic surfaces in a three dimensional euclidien space.

For the classification ,Haouari said that the main idea is to try to eliminate x,y and z by changing the coordinate system :

let $A = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$

So we have to calculate : det A

•If det A $\neq 0$, then we change the coordinates, and we have :

$$\bigstar \iff \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + c = 0$$

And here, Haouari admired the fact that this represents just a finite number of cases , between them: cone,ellipsoid,hyperboloid,singleton...

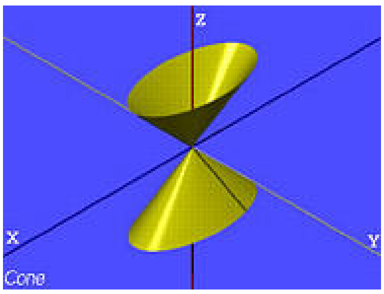


Figure 1: cone

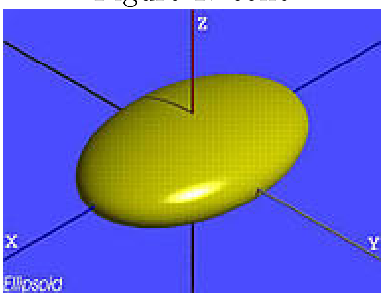


Figure 2: Ellipsoid

•If det A=0 , which means that rg(A)≤ 2 , we have tow cases :
◦If rg(A)=2 then it gives us either a paraboloid ,or an elliptic cylinder or a hyperbolic one.

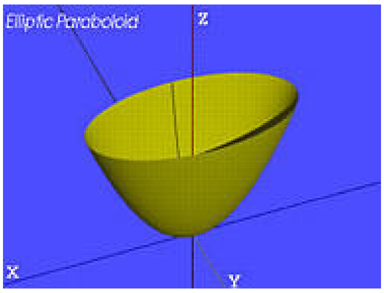


Figure 3: Paraboloid

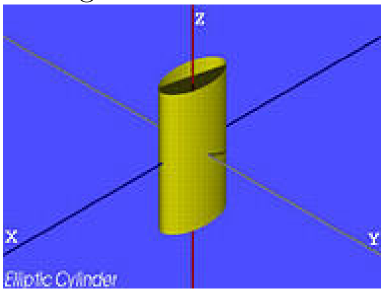


Figure 4: Elliptic Cylinder

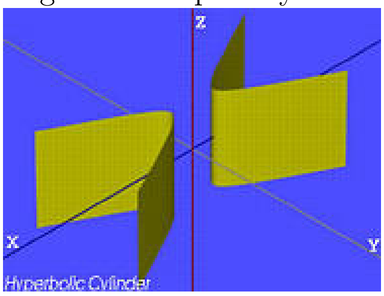


Figure 5: Hyperbolic Cylinder

$\circ If$ rg(A)=1 then we obtain a parabolic cylinder.

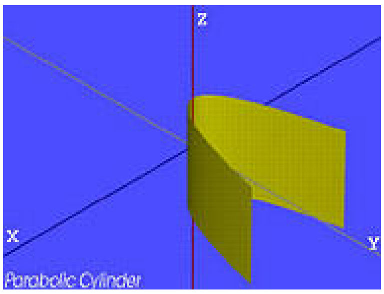


Figure 6: Parabolic Cylinder

Then, Haouari talked about the parametrization and showed us how to parametrize a ruled surface: Let S be a ruled surface , so :

$$m \in S \Leftrightarrow \exists u \in I, \exists v \in R : M(u,v) = P(u) + v\overrightarrow{V(u)}$$

where : $I \subset R$, P(u) a point and $\overrightarrow{V(u)}$ a direction vector.
Haouari announced tow propositions , and like everyday professor Zghib rose from his seat , and asked us this question :

"Does a non developable ruled surface exist ? If your answer is yes , give us an example ! "
After a discussion , the answer was yes , and the example is the hyperboloids.
Like this one , $(H) : x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
Haouari finished his beautiful presentation , and we applauded him warmly .

It was almost three o'clock when professor Azzedine,who was always very energetic , arrived. Before we started working on coxeter groups ,professor Azzedine preferred to give us this exercise :

"Prove that every isometry is composed of at most n reflexions , where n is the dimension of the euclidean vectorial space."

professor Azzedine decided to let the correction for the day after .
At 15:20 we began part one titled : generalities - the commutative case .
Professor Azzedine let us think about every question before correcting it , this was very fruitful for us. At 16:05 the first three questions had already been corrected which included proving that :

"Given an arbitrary isometry g and a reflexion s then $g^{-1} \circ s \circ g$ is also a reflexion"

So we took a break during which we discussed on different subjects as soon as we enjoyed drinking tea.The break ended at 16:25 .
Just after we entered the class , professor Zghib talked, for a moment, about : "the classification" and "lie groups".
Then we continued and proved that :

"Two reflexions commute if and only if they are identical or a hyperplane of one is perpendicular to the hyperplane of the other"

At 17:20 we finished the first part after discussing the possible cases in question 6 .
Professor Azzedine gave us time to try the second part , titled : The tow dimension case , we corrected the first questions, leaving the ninth because we did it before .

Knowing that : n=2 , E is an oriented euclidean vectorial space , G a coxeter group generated by two reflexions s_1 and s_2 of respective axes D_1 and D_2 , d_1 a unit vector in D_1 and d_2 a unit vector in D_2 , (e_1 ,e_2) an orthonormal direct base where $e_1 = d_1$, and θ such as : $d_2 = (cos\theta)e_1 + (sin\theta)e_2$.

We proved that : $s_1 \circ s_2$ is a rotation where 2θ is the mesure of its angle.

Then Professor Azzedine let us think about the next questions (from the tenth and up) and decided to correct them the day after, it was 17:50 , we finished earlier than the previous days because we were invited to a wedding party.
To resume, it was a wonderful day passed with a family of professors and students .

MATHCAMP 3

ALGER
Thursday morning 10/08/2017
reporter : *M'hammed OUDRAN*
Lecture on surfeces (with Mr.Laarbi)

the lecture began at **9H00 am**, This lecture was the last one on surfaces with Mr.Laarbi .
Mr.Laarbi began by giving the concept of the **Gauss map**, which will be used to define the **SFF** (second fundamental form). The concept of the **Gauss map** is worthwhile only for orientable surfaces , which will not be studied properly (for not having enough time). So the next definition :

Definition 0.1. *For an orientable surface S, the **Gauss map** of S is defined by :*

$$\begin{aligned} G : S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}(x) \end{aligned}$$

Where $\sigma : U \longrightarrow V \cap S$ is a local parametrization from an open set of $\mathbb{R}^2$ to an open neighborhood $V \cap S$ of x in S.

There was an intervention of Abdelhafidh MOKRAN which took a 5 minutes, it was about the need to create Algerian mathematics association. Then we resume our lecture.
After introducing the **Gauss map** , Mr.Laarbi has proved one of the fundamental properties of this map wich is :

Proposition 0.1. *The differential $dG_x : T_x(S) \longrightarrow T_x(S)$ of the **Gauss map** is a self adjoin linear map, that means :*

$$\forall (X, Y) \in T_x(S)^2 \;\; : < dG_x(X) \mid Y >=< X \mid dG_x(Y) >$$

The proof is simple and based on showing that for a basis $\{W_1, W_2\}$ of $T_x(S)$, we must have :

$$< dG_x(W_1) \mid W_2 >=< W_1 \mid dG_x(W_2) >$$

So for a local parametrization σ of x we choose the basis $\{\sigma_u(x), \sigma_v(x)\}$, by taking the derivative of $< G \mid \sigma_u >= 0$ and $< G \mid \sigma_v >= 0$, relative to u and v , we get :

$$< G_u \mid \sigma_v > + < G \mid \sigma_{u,v} >= 0$$
$$< G_v \mid \sigma_u > + < G \mid \sigma_{u,v} >= 0$$

and finally :

$$< G_u \mid \sigma_v >=< G_v \mid \sigma_u >$$

□

The fact that dG_x is self adjoin linear map allows us to the next definition of the **SFF** :

Definition 0.2. *The symmetrical bilinear map II_x defined by :*

$$II_x : T_x(S)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \longmapsto < dG_x(X) \mid Y >$$

is called the second fundamental form of S at x

One of the most important properties pf the **SFF** is the following proposition which has a nice geometric content :

Proposition 0.2. *Let $x \in S$, and M_{II_x} the matrix of the **SFF** in a chosen basis . We have :*

- *If $detM_{II_x} \gneq 0$, then the surface is locally on one side from $T_x(S)$.*
- *If $detM_{II_x} \lneq 0$, then the surface is locally on the other side from $T_x(S)$*

Since the sign of this determinant is very important , Mr.Laarbi has guided us by a couple of questions to find a definition of a scalar K which has the same sign us $detM_{II}$, and does not depend on the change of coordinate , and which present the **Gauss curvature** :

Definition 0.3. *The **Gauss curvature** of a surface S at a point x is defined by :*

$$k(x) = \frac{detM_{II_x}}{detM_{I_x}}$$

Mr.laarbi give us two examples about the **Gauss curvature**, one of the plane, and the other of the surface of revolution :

1. Let P be a plane of $\mathbb{R}^3$, $A \in P$, and $\{V_1, V_2\}$ an orthonormed basis of P. So we have the global parametrization :

   $$\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow P$$
   $$(u, v) \longmapsto A + uV_1 + vV_2$$

   Then :

   $$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } M_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consequently : $k \cong 0$

2. Let S be a surface of revolution parametrized by :

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$$
$$(t, \theta) \longmapsto (f(t)cos(\theta), f(t)sin(\theta), g(t))$$

Where $f, g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \gtrsim 0$, and $(f', 0, g')$ is a unit vector speed. For a point $x = \sigma(t, \theta) \in S$ we have :

$$M_{I_x}* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(t) \end{bmatrix} \text{and } M_{II_x} = \begin{bmatrix} f'(t)g"(t) - f"(t)g(t) & 0 \\ 0 & f(t)g'(t) \end{bmatrix}$$

A direct calculus shows that :

$$k(x) = \frac{-f'(t)}{f(t)}$$

Mr.Laarbi has finished this lecture by proving one of the fundamental results in differential geometry, the egregium theorem of Friedrish Gauss. The theorem shows that the **Gauss curvature** of a surface is preserved by local isometry, in other meaning, the local position of the surface according to the tangent plan does not change if one bends the surface without stretching it.
In the last moments of this lecture, Mr.Laarbi offered an award (a book of differential geometry written by Manfredo Do Carmo) for the first student who can answer the following question :
What kind of structure will we have on a surface S if we replace the **FFF** by the norm of the vector product of the basis $\{\sigma_u, \sigma_v\}$?
this offer has created an amazing challenged between students,The answer was that we get a measure space on S ,and which came from the student DECHICHA DAHMANE.
end this question marks the end of the lectures on surfaces gaved by Mr Laarbi.
after the lecture, we went out for the lunch at **1H00 pm**.

rapport écrit par HACHIM Athmane.

l'après-midi, nous avons reprit les cours à 14h20.

nous avions déjà entamé le sujet des groupes de *Coxeter*,que vous pouvez consultez ici.

partie III-les familles obtusangles et acutangles :

cette partie comprend les questions 13 à 16 du sujet sur les groupes de *Coxetre*. E est un espace vectoriel euclidien, et on note $(,)$ son produit scalaire.

soit $(r_1,...,r_p)$ une famille de vecteurs de E non nuls, on dit que cette famille est obtusangles si :$(r_i,r_j)\leq 0$ pour tout i,j avec$i\neq j$.

13-on suppose qu'il existe une famille de vecteurs $(r_1,...,r_p)$ qui est obtusangles et qui sont dans le même demi-espace strict $i.e : \exists t\in E$ tel que $\forall 1\leq i\leq p, (t,r_i)>0$.

on veut démonter que cette famille et une famille libre, on raisonne par l'absurde : on peut supposer qu'il existe une relation de la forme $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i r_i = \sum_{i=k+1}^{p}\mu_i r_i$. où les λ_i,μ_i sont positifs, soit le vecteur v définit par cette égalité.

a-calculons (v,v), on a $v=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i r_i = \sum_{i=k+1}^{p}\mu_i r_i$ donc, $(v,v)=(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i r_i, \sum_{i=k+1}^{p}\mu_i r_i)$, or on a aussi$(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i r_i, \sum_{i=k+1}^{p}\mu_i r_i) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{p}\lambda_i\mu_j(r_i,r_j)$ avec $(r_i,r_j)\leq 0, i\neq j$, on obtient alors que $(v,v)\leq 0 \Rightarrow (v,v)=0$, et ce-ci nous donne que $v=0$

b-puisque $v=0$, alors $(v,t)=0$ or $v=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i r_i$ et donc $(v,t)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(r_i,t)$ avec au moins un des λ_i non nul, on a alors que $(v,t)>0$,contradiction.

la famille de vecteurs $(r_1,...,r_p)$ est bien libre.

14-soit $e_1,...,e_n$une base de E , on lui associe la matrice M dont les coefficients sont $m_{i,j} = (e_i,e_j)$ la matrice M est symétrique .

a-exprimons ${}^tXMX$ où X est la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

on a alors ${}^tXMX = (\sum_{i=1}^{n}x_i e_i, \sum_{i=1}^{n}x_i e_i)$.

b-on suppose a que les vecteurs $(e_1,...,e_n)$ sont unitaires, montrons que $sp_{\mathbb{R}}(M)\subset]0,n[$.

on remarque M est symétrique définie positive d'après la question précédente donc son spectre est dans $\mathbb{R}_+^*$,et on a $tr(M)=\sum_{\lambda_i\in sp(M)}\lambda_i$ et $(e_i,e_i)=1$, donc $tr(M)=n$,il s'en suit que $\lambda_i<n$. et on bien que le spectre de M est dans $]0,n[$.

15- a,b et c soit $B=(e_1,...,e_n)$ une base de E, on démontre que qu'on peut lui associée une

unique base $F = (f_1, ..., f_n)$ telle que $(e_i, f_j) = 0$ si $i \neq j$ et $(e_i, f_i) = 1$.
les coordonnées de f_i dans B existent est sont la solution du système linéaire : $MX = X_i$ où ${}^tX_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ le i-ème vecteur de la base canonique de $M(\mathbb{R})$, et comme M est SDP les solutions de ces n systèmes existent et sont uniques, notons ces solutions par Y_i, donc on a $MY_i = X_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$.
on a bien $f_i = \sum_{j=1}^{n} (f_i, f_j)e_j$, cette equation correspond ,d'après la question , à $Y_i = NX_i$ où N est la matrice dont les coefficients sont $n_{i,j} = (f_i, f_j)$.
on en déduit que la matrice M et inversible, d'inverse N.
16-on suppose dans cette question que la base B est obtusangles, et on veut démonter que la base associée F est acutangles $i.e$: $(f_i, f_j) \geq 0$.
soit $A = I - \frac{1}{n}M$, la matrice A est clairement symétrique.
a- la matrice A est diagonalisable car symétrique, et son spectre $sp(A) = 1 - \frac{1}{n}sp(M)$ où $1 - \frac{1}{n}sp(M) = \left\{1 - \frac{1}{n}\lambda | \lambda \in sp(M)\right\}$, et donc $sp(A \in]0, 1[$.
b-comme $|\rho(A)| < 1$,la série matricielle $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge et a pour limite $(I - A)^{-1}$, et ses coefficients sont positifs.
c- on a $I - A = \frac{1}{n}M$ et donc $(I - A)^{-1} = \frac{1}{n}N$, on trouve que les coefficients de N sont positifs , on en conclu que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est une famille acutangles.
et on termine ainsi la partie III du sujet.
pause-café : après avoir terminer la partie **III**, nous sommes sortie prendre un peu de thé a 16h30 environ.

par manque de temps, nous n'avons pas pu traité la partie **IV** convenablement,nous l'avons juste discuté oralement.
cette partie concerne les systèmes de racines.
le cours s'est terminé à **17h30**.

C'est le 7*ème* jour du camping, et le début de la deuxième semaine qui a vu un grand changement dans le programme en passant du cours des surfaces de Monsieur *Laarbi* au sujet du théorème de Nash(traité par *Mehdi*), aussi; des DMs des groupes de Monsieur *Azzedin* à l'analyse complexe.

A cause du retard de *Mehdi*, Monsieur *Zeghib* a trouvé l'occasion pour nous inciter à utiliser le programme gratuit LaTeX, qui est de plus qu'il soit facile à utiliser; ces PDF sont non-volumineux, Ensuite il demanda ce que on a retenu globalement des cours de Géométrie ce qui a déclenché un petit débat sur les Formes fondamentales, la préservation de l'aire et la longueur. *Mehdi* arriva en retard sous les reproches amicales de Monsieur *Zeghib* et commença son sujet:

Le théorème de John Forbes Nash est un théorème très difficile et très général en géométrie qui affirme que toute variété riemannienne peut être plongée de manière isométrique dans un espace euclidien, on en vas traiter un cas particulier et c'est celui du tore, Sachant que il s'agit bien d'une variété riemannienne.

Agrégation de Mathématiques 1997

Soit d un entier naturel positif.

On désigne par Λ le sous-groupe additif $(2\pi\mathbb{Z})^d$ de $\mathbb{R}^d$.Une application f définie sur $\mathbb{R}^d$ est dite Λ-périodique si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $f(x+\lambda) = f(x)$.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $C^\infty(\mathbb{R}^d, E)$ le sous espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}^d$dans $\mathbb{E}$, $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, E)$ le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R}^d, E)$ constitué des applications Λ-périodiques.

L'espace vectoriel des matrices carrés à coefficients réels à d lignes et d colonnes est noté $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, et I désigne la matrice identité. Si $A \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathscr{M}_d(\mathbb{R}))$ et i,j sont deux entiers compris entre 1 et d, $A_{i,j}$ désigne l'élément de $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ défini par le coefficient de A en ligne i et en colonne j .

Si N est un entier positif, on note $\langle,\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Etant donné deux applications V, W de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^N$, on note $\langle V, W\rangle$ la fonction sur $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\langle V, W\rangle(x) = \langle V(x), W(x)\rangle.$$

Si $P \in (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$, on note $\Gamma(P)$ l'élément de $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ défini par

$$\Gamma(P)_{i,j} = \langle \frac{\partial P}{\partial x_i}, \frac{\partial P}{\partial x_j}\rangle, 1 \leq i, j \leq d.$$

Une métrique de dimension d est une application $G \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $G(x)$ soit une matrice symétrique définie positive. On dit que G est représentable en dimension N s'il existe une application $P \in (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$, telle que $\Gamma(G) = P$.

Le but de ce problème est de démontrer que toute métrique de dimension d est représentable en dimension assez grande (théorème de Nash,1956).

On introduisit par la première partie qui montre que on peut plonger le tore de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ (isométriquement) mais pas dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant une méthode analytique qui repose sur les équations aux dérivées partielles; et puis Zeghib donna la généralisation de cette introduction, je cite:

Généralisation:

Soit V^n Variété différentielle compact alors il n'existe pas d'immersion isométrique de V^n dans $\mathbb{R}^n$.

Au cours du travail,on s'est intéressé aux solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad f\text{: périodique et } (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 = 1$$

en fait, c'est équivalent à $||f'|| = 1$ dont les solutions sont les courbes paramétrées par la longueur d'arc (remarqua M'hammed).

La pause café: nos matheux ouvrirent leurs yeux sur un nouveau domaine et une nouvelle théorie universelle, chose qui a rendu la pause moins vive, chaque un s'isola dans un coins, réfléchit seul sur ce que a pris du sujet et essaya d'interpréter les choses ambigües. Le rapporteur a interrompu la réflexion des quelques-uns en les interrogeant sur le camping en générale, les participants aimeront bien avoir une grande quantité de thé à la pause thé, au lieu de se contenter d'un demi-verre (Ils rigolent bien sûre) à part ça tout est acceptable aux limits des organisateurs (ils parlèrent de l'hébergement, le lieu de travail et l'alimentation).

La reprise: Monsieur *Khaled Saadalah* (plus connu sous le nom **cheb Khaled**) nous a ramenés *3 matheux-ingénieurs*, cadres de La société de télécommunication Mobilis, ils exprimèrent leur volonté à aider notre association et notre camping tout en croyant que: " **un bon ingénieur est un bon mathématicien d'abord** ", et ce n'est pas pour nous louanger mais c'est une vérité blessante; disait-ils.Ensuite ils parlèrent brièvement sur le programme de bourse "AIMS" (American institue for Mathematical Sciences); qui est selon eux: une recherche d'un Einstein africain.
On pensa que *Hamza* (le fou des mathématiques) apprécia cette intervention, vu que il soit passionné par la physique théorique et la relativité.

Maintenant vient le tour de *Yenni* et *Rym* en présentant deux théorèmes puissants et basics de l'analyse complexe(sujet de soutenance L3) ceux sont:
1.Théorèmes de factorisation de Weierstrass (présenté par *Rym*).
2.Théorème de Mittag-Leffler (Présenté *Yenni*).
Je n'oublie pas de noter que Monsieur *Ainouz* avait été dur et rigoureux avec ce binôme qui avait eu travaillé ensemble sous l'encadrement de Monsieur *Smai*.

Théorème de factorisation de Weierstrass:

Etant données:

-Une suite injective de nombres complexes α_n qui tend vers l'infini.

-Une suite d'entiers m_n.

Alors il existe une fonction entière f dont les seuls zéros sont les α_n et de multiplicité m_n .

Rappels:

1. Toute fonction holomorphe est analytique et vice-versa. En combinant cette fait avec le théorème au-dessus et sachant que ils soient fausses dans le cas réels; on constate que l'analyse complexe est si généreuse.

2. Les zéros d'une fonction analytique est un ensemble fermé car la fonction est continue, et il de plus discret(le principe des zéros isolés), comme **exemple:** il n'existe pas d'une fonction analytique non-nulle qui s'annule sur cette ensemble $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

3. On a le développement limité au voisinage de 0:

$$ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - ...$$

4. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Ln(1-a_n)$.

Construction:

A priori la fonction s'écrit comme: $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{\alpha_n})$ (en supposant que $f(0) \neq 0$ et $m_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$).Mais comme on n'est pas sûre si le produit converge ou pas qui équivaut à la convergence de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Log(1-\frac{z}{\alpha_n})$$

De même la convergence de :

$$\left(-\frac{z}{\alpha_1}-\frac{1}{2}(\frac{z}{\alpha_1})^2-\dots\right)+\left(-\frac{z}{\alpha_2}-\frac{1}{2}(\frac{z}{\alpha_2})^2-\dots\right)+\dots$$

L'idée est de démontrer par récurrence et en utilisant une suite croissante des compactes qui couvre tout le plan complexe qu'il existe $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels qui satisfait $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|\left(-\frac{z}{\alpha_n}-\frac{1}{2}(\frac{z}{\alpha_n})^2-\dots\right)+\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}(\frac{z}{\alpha_n})^k|\leq\frac{1}{n^2}$$

Alors la fonction g admet bien les α_n comme des zéros:

$$g(z)=f(z).exp(\sum c_n)$$

ou $c_n=\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}(\frac{z}{\alpha_n})^k$ et puis en multipliant par z^m ou m est la multiplicité du 0. □

Math-camp 3-ENS kouba

Rapport du 12-aout-2017 écrit par OUNASLI Hamza (après-midi)

9 novembre 2017

1 - déroulement de l'après-midi en bref :

- Comme d'habitude , après 45 minutes environs de repos , on s'est retrouvés à la salle de conférence rattachée au laboratoire des EDP de l'ENS Kouba (à 14h :15min) , l'après-Midi a apportée le thème de l'analyse Complexe (exposé fait par Yenni sur le Théorème de Mittag-Leffler , Ainsi qu'un problème posé par Mr.Zeghib est résolu par Fayssal .)

- dans les premières 15 minutes Monsieur Zeghib nous propose l'idée de créer une association de mathématiques au niveau de la wilaya d'Alger, qui se chargerai prochainement d'organiser le math-camp d'été et d'autre activités(Intervenir dans l'organisation des sélection aux olympiades internationale de mathématiques (IMO), Organiser des Conférences grand publiques de vulgarisation ...etc).

- Après ,Yenni expose un résultat d'analyse complexe tiré de son mémoire de L3 , le Théorème de Mittag-Leffler , qui est la suite de l'exposé fait par Rym le Matin autour de le théorème de Weierstrass .

2 - Exposé de yenni :

- avant de présenter le théorème de Mittag-Leffler il était nécessaire de rappeler quels que résultats importants en Analyse complexe :

. Soit f une fonction complexe holomorphe (i.e : $f \in H(\mathbb{C})$) , alors : $f' \in H(\mathbb{C})$.

. $f \in H(\mathbb{C}) \Leftrightarrow f$ est analytique sur $\mathbb{C}$.

. $f \in H(\mathbb{C})$ et $f(z_0) = 0$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$ et $F \in H(D(z_0, r))$ tel que $f(z) = (z - z_0)^n F(z)$.

. f est analytique $\Leftrightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C},\ \exists r > 0,\ \exists (a_n)_n \subset \mathbb{C}$ tel que : $f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (z - z_0)^n$

. Théorème de Goursat et Morera :

Soit $f \in H(\mathbb{C})$ et R un rectangle a coté parallèle aux axes (Ox) et (Oy) .

Goursat : Si $f \in H(\mathbb{C})$ alors :

$$\int_R f(z)dz = 0$$

Morera : $f \in H(\mathbb{C})$ est equivalent à :

$$\int_R f(z)dz = 0$$

- Preuve : définissons la fonction F définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$F(z) = \int_{\gamma(z)} f(z)dz$$

et on prouve que $F'(z) = f(z)$,Parce que celon la première propriété des fonction holomorphes citée au début,si f est holomorphe donc sa dérivée l'est aussi , Pour cela nous evaluons : $\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)$ qui est egale a :

$$-\int_{\gamma(h)} \frac{f(u) - f(z)}{h} dz.$$

et on prenons $M = max|f(u) - f(z)|$ sur un disque $D(z_0, r)$ on déduit que $|g| < M.h$ .. et on menons h vers 0 on obtient que $g = 0$ d'où le résultat attendu .

- Corollaire 1 : Si $f \in H(\mathbb{C} - D)$ ou D est une droite de $\mathbb{C}$. On a :

$$f \in C^0(\mathbb{C}) \implies f \in H(\mathbb{C})$$

- corollaire 2 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ Alors :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} f_n \longrightarrow f \in C^0(\mathbb{C}) \implies f \in H(\mathbb{C})$$

- Avant pause café :

- Monsieur Zeghib nous pose le problème suivant : soit ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes bornés sur ω qui convergent vers une fonction $f(z)$, es - que f est holomorphe sur ω ? .

On a fait plusieurs essaies mais l'exercice a bien résisté ! .

- Monsieur Zeghib propose de chercher une homographie de la forme : $f_n(z) = \dfrac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$ avec a_n , b_n , c_n , d_n sont des suites de nombre complexe , tel que $f_n(z)$ vérifie les condition de problème .

- pause café (16h :20 - 16h :35) .

- après la pause café :

Haroune et Zakaria on eu une idée qu'ils voulaient proposée pour résoudre le problème, mais ça n'a pas marché aussi.

- définition 1 : soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$,soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus z_0$,on dit que z_0 est un pôle de f,si $\exists g$ une fonction holomorphe sur Ω et $g(z_0) \neq 0$ et que :

$$\forall z \in \Omega, f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

. example :

$f(z) = \dfrac{1}{1 - z}(z_0 = 1).$

- définition 2 : on dit qu'une fonction complexe f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ s'il existe une partie A localement finie tel que :

$$\forall x \in A : x \in Pol(f) \wedge f \in H(\mathbb{C} - A)$$

- Théorème de Mittag-Leffler :

étant donné $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite injectif de nombre complexe n'ayant pas de points d'accumulations dans $\mathbb{C}$,et$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes complexes sans terme constant .

- il existe alors une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ dont les seuls pôles sont les termes de la suites (a_n) et dont la partie principale associée à a_n est $P_n(\dfrac{1}{z - a_n})$.

- corollaire : toute fonction méromorphe est le rapport de deux fonctions holomorphes .

Fin de l'exposé de Yenni .

- Références :

dans le cadre de préciser des références avec lesquelles on va travailler , Monsieur Raffed Nous donne deux bonnes références en Analyse Complexe :

Réf 1 , Auteur : B.Chabat .

Réf 2 , Auteur : J.F.Pabian .

$$\boxed{\text{Fin de la journée(17h :50)}}$$

13/08/2017 was the 9^{th} day in MathCamp 3 Kouba, and also the first day in the second week of this project, after the first part in which we were focusing more in Algebra and Geometry course and exercises with professors **Larbi labi** and **Azzedine**, Sunday 13 August was the day to start the sequence of course of **Physics-Mathematics equations** presented by professor **Moussaoui**, which was supposed to be followed by three other course of one hour and half for each one, so it was my responsibility to write a report for this morning.
To be honest, this course was really one from the best course i assisted in this subject, Professor **Moussaoui** was presenting its notions in a very suitable way (understable way even for those who are not in the domain or with a low level of knowledge 'L1 and L2 students').
As i said this first course was introductif in its first part, it spokes about some definitions and notations, we started by a definition of partition of the unity:
For any open non-empty set $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ covered by a countable familly of opens $(\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i)$, we can find an associated familly of regular functions $\big(\theta_i\big)_{i\in I}$ satisfiying:

- $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ with $supp(\theta_i) \subset \Omega_i$
- $\theta_i : \Omega \to [0,1]$
- $\forall x \in \Omega : \sum\limits_{i\in I} \theta_i(x) = 1$

Then we introduced some classes of domains in $\mathbb{R}^d$ as the following:
Let Ω be a bounded open set in $\mathbb{R}^d$, with denoted boundary $\partial\Omega$, we want to deal only with domains with boundary which can be seen, localy, as a graphe of function from $\mathbb{R}^{d-1}$ into $\mathbb{R}$, then the regularity of Ω will be gain from the regularity of this function by definition, in Mathematical language:
We say that Ω is Lipschitz domain (resp. of classe C^k) if for all $x = (x',x_d) \in \partial\Omega$, there exists a ball $\mathcal{B}(x,r)$ and a lipschitz function (resp. of classe C^k):
$\varphi_x : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ satisfing:

- $\mathcal{B}(x,r) \cap \Omega = \{y \in \mathcal{B}(x,r) : \varphi_x(y') > y_d\}$
- $\mathcal{B}(x,r) \cap \partial\Omega = \{y \in \mathcal{B}(x,r) : \varphi_x(y') = y_d\}$

Problem of deformation of a membrane:
Let **m** be an elastic membrane which at rest occupies an open and bounded domain Ω of class C^1 of $\mathbb{R}^2$, we apply a force f proportional to the third cordinate $\overrightarrow{e_3}$ $\big(\overrightarrow{f} = f(x,y)\overrightarrow{e_3}\big)$, supposing moreover that $\partial\Omega$ is fixed, so that each point (x,y) will be shifted to the point $\big(x,y,u(x,y)\big)$, where $u(x,y)$ is the movement of each point (x,y) in the direction $\overrightarrow{e_3}$ after applaying the force f.
The problem is to find u after knowing f???
After the use of some lows and substitution of some other axumes from physics we obtain that u should satisfy $\mathcal{J}(u)$ the minimum of $\mathcal{J}$ where:

$$\mathcal{J}(v) := \iint \frac{k}{2}\big|\nabla v\big|^2 + \iint \frac{a}{2}v^2 - \iint fv \tag{1}$$

to passe from the problem of minimize (1) to a knowing form (Laplace Problem) we can follow the following steps as we did in this course:
because $\mathcal{J}(u)$ should minimize (1), then we have, for all $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ and $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(u + t\varphi) \tag{2}$$

We start first by developing $\mathcal{J}(u + t\varphi)$, so we find after calculus:

$$\mathcal{J}(u+t\varphi) = \mathcal{J}(u) + t\bigg(\iint \frac{k}{2}\nabla u.\nabla\varphi + \iint auv - \iint f\varphi\bigg) + \frac{t^2}{2}\bigg(\frac{k}{2}\iint \big|\nabla\varphi\big|^2 + \iint \frac{a}{2}\varphi^2\bigg) \tag{3}$$

Then we substitute (3) in (2) and we use the fact that the inequality (2) is satisfyed for the positives and negatives values of t in order to obtain an equality, and finally by taking the limit of t to 0 we obtain:

$$\iint \big(- div(k\nabla u) + au - f\big)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) \tag{4}$$

Were we used the green formula:

$$\int_{\Omega} \Delta v \varphi dx = -\int_{\Omega} \nabla v.\nabla\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}\varphi d\sigma \tag{5}$$

and the fact that $\partial\Omega$ is fixed by hypothesis (this means $u_{|\partial\Omega} = 0$), in order to obtain (4). Finally, (4) is satisfyed for all $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, with the hypothesis on the boundary of Ω we obtain:

$$\textbf{Laplace Problem} \begin{cases} -div(k\nabla u) + au - f = 0 & on\ \Omega \\ u = 0 & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

In order to give some legality for the derivation in what we did, Professor **Moussaoui** introduced, in a simple way, the sobolev space:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall\ 1 \leq i \leq 3\} \tag{6}$$

We suppose that Ω is lipschitz, so we can prove (admitted) that $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ is dense in $\mathcal{H}^1(\Omega)$, and the operator:

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega) \\ & v & \longmapsto & P(v) = v_{|\partial\Omega} \end{array}$$

is prolongable to a continuous one denoted γ_0 from $\mathcal{H}^1(\Omega)$ into $L^2(\partial\Omega)$ (γ_0 is called the trace operator), and therefore we can define:

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) := \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) : \gamma_0(v) = 0\} \tag{7}$$

this gives a sense to the point $u_{|\partial\Omega} = 0$.

This was approximately the big lines that we saw in this first course, as we used to do in this Math-Camp, between each two paragraphs, we had a break of 20 to 30 minutes so we can discus, take a rest for a short time and be ready do restart again, in 13/08/2017, this was my job to talk about this half day the next part in this day was about subgroups of Hall presented by **Abderahim Messbah**.

After the lunch break, afternoon activities started around 14:15.

First, we talked about the establishment of a math-association in Algiers to facilitate the organization of the mathematics camp and other scientific events in future. We discussed the name and the various steps that must be taken to establish the association and focus especially on the participants who live at Algiers to be the founding members. We hope that they can set up the association until the next math camp.

At 14:40, Abderrahim continue his talk about Hall groups. He gives the following theorem.

Theorem "Hall": *If G is solvable group, $|G| = a.b$, $(a,b) = 1$. Then, there exists a sub-group A of G such that $|A| = a$. For all B sub-group of G with $|B| = a$, A and B are conjugate.*

Abderrahim didn't give the proof, but we return to the notion of derivable group given at the morning.

Pr. Abdelghani Z. asked for some examples of derivable groups from the participants which allows to me adding to my knowledge the following examples.

$(\text{Aff}(\mathbb{R}^2))'$=$\text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ and $(\text{Aff}(\mathbb{R}))' = translations$.

$(Euc_2)' = translations$ in $\mathbb{R}^2$ (Euc_2 is the group of direct displacements)

We can define Euc_2 group as following: $(x,y) \to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ where $A \in SO(2)$.

It's 15:10, before Mehdi continue the solution of agregation subject of 1997. Pr. Abdelghani takes the opportunity to talk about the div**,** ∇**,** $\triangle$ **operators** in the case of Rimanien manifold to make the connection with the subject of PDE which considered a rich subject where Pr. Moussaoui gives a course about some math-physics equations. Pr. Abdelhgani talks about these operators and some interpretation.

At 15:35, I felt that the participants were getting tired. In these moments the participants of -L1- (as we call them) will come out to work under the supervision of Dr. Samir about the subject of numerical series at other classroom.

Mehdi continue in the solution of the subject of 1997 at 15:40. The purpose of this subject is proving Nash embedding theorem in the case of Torus.

He will start today by the question $3.b$.

The purpose of 3^{rd} question is proving that G is not presentable in dimension 3.

3.b Let P be representation of G in dimension 3 and $x \in \mathbb{R}^2$. We have the following equalities

$$\langle \frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_1} \rangle = 1$$
$$\langle \frac{\partial P}{\partial x_2}, \frac{\partial P}{\partial x_2} \rangle = 1$$
$$\langle \frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2} \rangle = 0.$$

We deduce that $\frac{\partial P}{\partial x_1}$ and $\frac{\partial P}{\partial x_2}$ are orthonormal. Therefore, $(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, N)$ is an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ where $N = \frac{\partial P}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial P}{\partial x_2}$.

By differentiation of previous equalities, one has that $\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}$ and $\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}$ are orthonormal to the plane generated by $(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2})$.

Then, there exist three maps a_1, a_2 and b (in $\mathscr{C}^\infty_{per}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$) such that :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = b.N, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1} = a_1.N, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2} = a_2.N.$$

By differentiation of $N(x)$ and using the formula of the double vector product, one gets:

$$\frac{\partial N}{\partial x_1}(x) = -a_1 \frac{\partial P}{\partial x_1}(x) - b \frac{\partial P}{\partial x_2}(x)$$
$$\frac{\partial N}{\partial x_2}(x) = -b \frac{\partial P}{\partial x_1}(x) - a_2 \frac{\partial P}{\partial x_2}(x).$$

3.c By differentiation, one has

$$\frac{\partial^3 P}{\partial^2 x_1 \partial x_2} = \frac{\partial (b.N)}{\partial x_1} = \frac{\partial b}{\partial x_1} N + b \frac{\partial N}{\partial x_1} = \frac{\partial b}{\partial x_1} N - b.a_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} - b^2 \frac{\partial P}{\partial x_2}$$
$$\frac{\partial^3 P}{\partial^2 x_1 \partial x_2} = \frac{\partial (a_1.N)}{\partial x_2} = \frac{\partial a_1}{\partial x_2} N + a_1 \frac{\partial N}{\partial x_2} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} N - b a_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} - a_1 a_2 \frac{\partial P}{\partial x_2}$$

For all x, $(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, N)$ forms a basis of $\mathbb{R}^3$. We deduce $b^2 = a_1 a_2$.

I remark that the participants went out of focus on the problem. A few minutes and the the clock will be about 16:15. It's the time of tea break which take about 30 minutes. We return working at 16:50 but the participants are tired. However, we agreed to complete the first part of the problem.

3.d P is periodic, then $\phi : x \to \langle P(x), P(x)\rangle$ reached its maximum on $\mathbb{R}^2$ at a point y of the compact $[0,2\pi]^2$. At the point y, one has $\langle \frac{\partial P}{\partial x_1}(y), P(y)\rangle = \langle \frac{\partial P}{\partial x_2}(y), P(y)\rangle = 0$ which implies that: there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $P(y) = \lambda N(y)$.

The matrix $A = \lambda \begin{pmatrix} a_1(y) & b(y) \\ b(y) & a_2(y) \end{pmatrix}$ is of zero determinant. Hence the associated quadratic form is degenerate.

Then developed ϕ until the second ordre at neighborhood of y, we get

$$\phi(y_1+h_1, y_2+h_2) =$$

$$\|P(y)+\frac{\partial P}{\partial x_1}(y)h_1+\frac{\partial P}{\partial x_2}(y)h_2+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y)h_1^2(y)+\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)h_2^2(y)+2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}(y)h_1h_2)+o(\|h\|^2)\|^2$$

$$= \phi(y) + \|\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y)\|^2 h_1^2 + \|\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)\|^2 h_2^2 +$$
$$\langle \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y)h_1^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}(y)h_1h_2, P(y)\rangle + o(\|h\|^2).$$

But $\|\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y)\|^2 = \|\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)\|^2 = 1$ and since P reach its maximum at y that the following quadratic form :

$$q : (h_1,h_2) \to \langle \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y), P(y)\rangle h_1^2 + \langle \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)\rangle h_2^2 + 2\langle \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}(y), P(y)\rangle h_1h_2 = \lambda(a_1h_1^2 + a_2h_2^2 + 2bh_1h_2)$$

is negative definite.

We remark that $q(h_1,h_2) = (h_1,h_2)A\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ which contradicts the degeneration of A.

As conclusion, the smallest dimension in which G representable is 4.

Until now we finish the first part and it remains four parts. it's about 17:45.

Pr. Abdelghani speaks a little about the importance of working many hours as possible to improve our level in mathematics.

Before we finish the scientific activities of this day. We recall the program of tomorow:

- Pr. Moussaoui will start at 09:00 on the subject of math-physics and the subject will be the heat equation.

-Zakaria will expose about Galois extension and its relation with solving algebraic equations.

- Hamza will talk us about Brower and Kukutani theorem.
- Mehdi will start at the second part in the subject of agregation 1997.

It's 18:30. The end of the day and the participants will have their dinner on 19:30.

SEMAINE 2, JOUR 3 : Lundi 14/08/2017

Après plus d'une semaine de cours intensifs, la fatigue commençait à se faire ressentir sur l'ensemble des participants. Toutefois, c'est avec entrain, que nous nous retrouvâmes, comme à notre habitude, à 9 heures tapante pour une nouvelle journée riche en mathématiques. Au programme, le deuxième cours de Monsieur Moussaoui sur les équation de la physique, le thème du jour étant l'équation de la chaleur ; puis deux exposés sur la théorie de Galois et le théorème du point fixe de Bowwer présentés respectivement par Zakaria et Hamza.
Avant de commencer, Monsieur Moussaoui nous demanda notre avis sur son cours de la veille. Notre réponse : nous aurions souhaité qu'il donne plus de détails concernant la mise en équation du phénomène physique étudié car c'est quelque chose que très peu d'enseignants expliquent de manière claire lors d'un cours d'EDP. Or, j'estime personnellement que c'est dommage de négliger le raisonnement physique, surtout en EDP, car après avoir compris concrètement en quoi consiste le problème, les mathématiques que l'on met par la suite pour le traiter prennent plus de sens. Le grand mathématicien russe Arnold a dit : "Les mathématiques sont de la physique où les expériences ne coûtent pas chères." ; phrase à méditer ! Monsieur Moussaoui écouta attentivement et très gentillement nos remarques et nous avoua qu'il ne maitrisait pas beaucoup la physique, mais il prit en compte ce que nous lui avions dit et fit des efforts pour nous expliquer du mieux qu'il le pouvait l'origine physique de l'équation de la chaleur $u_t - u_{xx} = 0$, ce dont nous lui sommes reconnaissant. On aurait souhaité encore plus de clarté dans le raisonnement physique car certains points demeurent encore un peu flous, comme par exemple avoir une interprétation simple et limpide de la divergence et de la formule :

$$\int\int_{\Omega} div(\overrightarrow{v})dx = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}d\sigma$$

qu'il utilisa lors de la mise en équation de l'équation de la chaleur.

Le problème à l'origine de l'équation de la chaleur est le suivant :
On s'intéresse à un milieu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ où règne une température u.
$u(x, y, z, t)$ est la température au point (x, y, z) à l'instant t.
On suppose que la température au bord est celle du milieu ambiant que l'on suppose constante égale à T_0 : $u = T_0$ sur $\partial\Omega$.
On suppose de plus qu'il y'a une source interne de chaleur en tout point de Ω :
$f(x, y, z, t)$ est la densité de chaleur au point (x, y, z) à l'instant t.
On cherche à faire le bilan d'énergie thermique qui entre ou sort de Ω entre deux instants t_1 et t_2.
Fixons dans un premier temps un instant $t \in [t_1, t_2]$ et évaluons de deux

manières différentes les transferts de chaleur qui ont lieu à cet instant.
La chaleur sort ou entre par la frontière $\partial\Omega$ de Ω.
On subdivise $\partial\Omega$ en "petites" surfaces $\Delta\sigma$ appelée élément de surface infinitésimal et on évalue la quantité de chaleur qui passe par chaque $\Delta\sigma$.
Un flux de chaleur mesure une quantité de chaleur par unité de surface. C'est un gradient de température ∇u.
Une particule dont la vitesse est tangentielle au bord ne sort pas de Ω. Ainsi, en tout point P de $\partial\Omega$, c'est la composante normale de ∇u au point P qui est responsable d'un transfert de chaleur entre le milieu Ω et le milieu extérieur.
On la note $\frac{\partial u}{\partial n}(P) := \nabla u . \overrightarrow{n}(P)$ où $\overrightarrow{n}(P)$ est la normale à $\partial\Omega$ au point P.
Sur chaque $\Delta\sigma$, on néglige les variations de $\overrightarrow{n}$. La quantité de chaleur qui passe par $\Delta\sigma$ est donc $k(\sigma)\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma, t)\Delta\sigma$ où $k(\sigma)$ est le coefficient de conductivité du matériau que nous allons supposer constant (le matériau est homogène).
Pour connaître la quantité de chaleur qui passe par $\partial\Omega$, on fait la somme sur les $\Delta\sigma$:

$$\sum_{\Delta\sigma} k(\sigma)\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma, t)\Delta\sigma \tag{1}$$

Ici interviennent les mathématiques !
Lorsqu'on fait tendre $\Delta\sigma$ vers 0, la somme (1) devient :

$$\int_{\partial\Omega} k(\sigma)\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma, t)d\sigma := Q(t)$$

Pour avoir la quantité de chaleur qui passe par $\partial\Omega$ entre les instants t_1 et t_2, on intègre $Q(t)$ par rapport au temps entre t_1 et t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\partial\Omega} k(\sigma)\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma, t)d\sigma\right)dt$$

N'oublions pas de prendre en compte l'apport interne de chaleur !
En effectuant un raisonnement similaire, la quantité de chaleur fournie par f entre t_1 et t_2 est donnée par :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz\right)dt$$

Finalement, le bilan d'énergie thermique entre les instants t_1 et t_2 est :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\partial\Omega} k(\sigma)\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma, t).nd\sigma\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz\right)dt := Q(t_1, t_2)$$

La quantité $Q(t_1, t_2)$ représente la variation de la quantité de chaleur dans Ω entre les instants t_1 et t_2, on a donc :

$$Q(t_1, t_2) = \int_{\Omega} u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)dxdydz$$

D'où :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\partial\Omega} k(\sigma)\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma,t).nd\sigma\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz\right)dt \quad = \quad \int_{\Omega}\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt\right)dxdydz$$

Grâce à la relation

$$\int_{\Omega} div(k\nabla u(x,y,z,t))dxdydzdt = \int_{\partial\Omega}\nabla u.\overrightarrow{n}(\sigma,t)d\sigma$$

on peut écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\Omega} div(k\nabla u(x,y,z,t)dxdydz\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz\right)dt$$

En dérivant successivement par rapport à t puis aux variables d'espace, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f = 0$$

avec u qui vérifie la condition aux limites : $u = 0$ sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ et la condition initiale : $u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z)$. Cet équation est appelée *équation de la chaleur*. Elle traduit un phénomène de *diffusion*.
Monsieur Moussaoui enchaina avec quelques propriétés de la solution u moyennant certaines hypothèses sur la donnée initiale u_0.

1. Si $u \in \mathcal{C}^0$ et $supp(u_0) \subset [a,b], u_0 \geq 0$ avec u_0 non identiquement nulle ; alors : $u(x,t) > 0 \forall x, \forall t$.
   Cette propriété traduit la vitesse infinie de propagation de la chaleur.
2. Si $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, alors $u(x,t) \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
   La discontinuité que l'on avait au départ est instantanément lissé.
   Physiquement, cette propriété traduit le fait que même si la température à l'instant initiale est discontinue, i.e. que la température n'est pas homogène dans le milieu Ω à l'instant t_0, la chaleur se diffuse instantanément dans Ω de telle sorte que la température y soit homogène.
3. La chaleur ne peut pas se concentrer, elle se propage :
   $sup(u(x,t)) \leq sup(u_0(x))$.
   Le *sup* atteint par la température initiale ne sera jamais dépassée avec le temps.

L'exposé faisait intervenir les notions de chaleur et de température.
Othmane s'interrogea sur le lien qui existait entre elles, ce qui souleva un débat. Je cherchai des éléments de réponse sur internet, ce qui ne fit pas vraiment plaisir à Monsieur Zeghib (pardon Monsieur !). De son côté, Monsieur Moussaoui ressentit le besoin de fumer une cigarette. Finalement, l'explication que j'ai trouvé sur la toile ne me satisfait qu'à moitié et je crois que

c'était aussi le cas des autres participants. Nous finîmes par laisser tomber la question. S'en suivit une intervention de Monsieur Zeghib, qui nous posa un problème dans le style du théorème de Weierstrass qui, d'après lui pourrai faire intervenir l'équation de la chaleur dans la preuve du résultat. Le problème est le suivant : étant donnée une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, existe t-il une fonction f analytique qui appliquée à un entier relatif n vaut a_n ?
Monsieur Zeghib nous demanda ce qu'on en pensait, si une telle fonction pouvait exister ? Les premières réponses furent négatives, puis Monsieur Zeghib posa la question à Mehdi, et bien évidemment, son pronostic était à l'opposé de celui des autres.
La première séance prit fin à 11 heures avec cette question ouverte. Ce fut alors le moment de la pause café (ou plus exactement la pause thé) qui dura 30 min environ.
11h30 : fin de la pause café.
11h35 : visite de Monsieur Saadallah qui nous informa de la venue d'un journaliste le lendemain (c'est à dire le mardi 15 août 2017) et de la participation de certains étudiants à une émission télévisée.
11h40 : débat général pour savoir quels étudiants participeront à l'émission.
11h45 : début de l'exposé de Zakaria sur la théorie de Galois.
La théorie de Galois apporte une réponse au problème suivant :
Étant donné un polynôme $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in K[X]$, on cherche à résoudre $P(X) = 0$.
S'il existe des formules permettant de calculer les valeurs exactes des racines des polynômes de degré $1, 2, 3, 4$; le théorème d'Abel indique que pour les polynômes de degré supérieur ou égal à 5, il n'existe pas d'expression par radicaux des racines, i.e. d'expression ne faisant intervenir que les coefficients, la valeur 1, les quatre opérations et l'extraction des racines n-ièmes.
La théorie de Galois donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation polynomiale soit résoluble par radicaux.
La théorie de Galois fait appel à des notions sur les extensions de corps et les groupes. Zakaria commença donc par énoncer les définitions et les résultats nécessaires à la compréhension de cette théorie.

Notions préliminaires : **Deux propriétés des corps :**

1. Les idéaux d'un corps sont triviaux.

2. Tout morphisme de corps non nul est injectif.

Extension de corps :
On appelle *extension* d'un corps k un couple $(\mathbb{K}, \phi)$ où :

1. $\mathbb{K}$ est corps.

2. $\phi : k \to \mathbb{K}$ est un morphisme de corps.

ϕ étant injectif, $k \simeq \frac{k}{ker\phi} \simeq Im\phi \subset \mathbb{K}$.

En fait, $\mathbb{K}$ est une extension du corps k si k est isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{K}$.
Monsieur Zeghib nous demanda si $\mathbb{C}$ possède une extension commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$.
On pensa au corps des fractions rationnelles de polynômes à coefficients complexes $C(X)$, mais on se rendit vite compte que $C(X)$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Il s'avère en fait que $\mathbb{C}$ ne possède pas d'extension commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$.
Zakaria enchaina avec la définition du degré d'une extension :
Le degré d'une extension de k est noté par $[\mathbb{K} : k]$ et est égal à $dim_k\mathbb{K}$.
Soit $k \hookrightarrow \mathbb{K}$ une extension de k et $S \subset \mathbb{K}$.

1. Le plus petit anneau contenant S et K est noté $k[S]$ et est égal à : $P(x_1, .., x_n), n \in \mathbb{N}, x_i \in S, P \in k[x_1, ..., x_n]$.
2. $k(S) = Frac(k[S])$

Définition d'un *k-plongement* (ou *k-isomorphisme*) :
Si $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ sont deux extensions de k :
$\phi_1 : k \to \mathbb{K}_1$, $\phi_2 : k \to \mathbb{K}_2$
On appelle $k-plongement$ ou $k-isomorphisme$ tout morphisme $\psi : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ tel que $\forall x \in k, \psi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$.
Caractéristique d'un corps :
La caractéristique d'un corps $\mathbb{K}$ est le plus petit entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n.1 = 0$.
Si $n.1 \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$, alors K est de caractéristique nulle.
Un corps est de caractéristique nulle ou un nombre premier.
Corps premier :
Un corps est dit premier s'il n'a pas d'autre sous corps que lui même.
Soit $\mathbb{K}$ un corps et F un sous corps premier de $\mathbb{K}$.

1. Si car$\mathbb{K} = 0$, alors $F \simeq \mathbb{Q}$.

2. Si car$\mathbb{K} = p$ avec p premier, alors $F \simeq \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.

Extension algébrique :
Soit $k \hookrightarrow \mathbb{K}$ une extension de k et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe $P \in k[X]$ tel que $P(a) = 0$.
On dit que $\mathbb{K}$ est algébrique si tout élément de $\mathbb{K}$ est algébrique.
Polynôme irréductible :
On dit qu'un polynôme P est irréductible sur $\mathbb{K}$ s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes qui lui sont associés, i.e. les polynômes

de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit $k \hookrightarrow \mathbb{K}$ une extension de k et $a \in \mathbb{K}$.
On considère l'application Φ_a définie par :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_a & : & k[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & P & \mapsto & P(a) \end{array}$$

L'application Φ_a est un morphisme de k-algèbre. On note $k[a]$ son image.
$k[a]$ est donc le sous-k-espace vectoriel de $\mathbb{K}$
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. a est algébrique sur k.

2. $\dim_k(k[a]) < +\infty$.

3. Φ_a est non injective et $ker(\Phi_a) =< min_k(a) >$; $min_k(a)$ est appelé polynôme minimal de a.

Deux éléments a et b de $\mathbb{K}$ sont conjugués si $min_k(a) = min_k(b)$.
Nous fûmes interrompus à ce moment par Monsieur Saadallah qui nous demanda de descendre immédiatement pour déjeuner.
Plat du jour : couscous.
Reprise des cours : 14h30.
Zakaria donna les définitions d'un corps de décomposition, des polynômes séparables et des extensions galoisiennes pour finir avec le théorème de Galois. Je laisse le soin à la personne responsable du rapport de l'après midi de détailler cette partie.

SMAI Rym.

rapport du 15/08/2017 , écrit par ZAIZ khaoula.

Une nouvelle journée au Mathcamp .

Comme d'habitude, nous avons commencé à 9 : 00 du matin au laboratoire d'EDP et Histoire de mathématiques de l'ENS Kouba.

La première séance est cours sur les équations de la physique mathématique qui est présenté par Monsieur **Mohand Moussaoui**, intitulé : équations des Ondes .

Dans ce cours, Monsieur Moussaoui n'a pas expliqué le côté physique de l'équation mais il a donné des exemples.

Bien qu'il ait des étudiants qui ont dormi pendant cette séance , il y en a eu d'autres qui ont posé des questions comme **Yenni** et **Houdaifa**.

monsieur **moussaoui** a commencé par donner une forme de l'équation des ondes

$$\int\int k(x,y)\nabla u.\nabla v + au_0 v = \int\int fv$$

En intéger par partie, on obtient

$$\begin{cases} -div(k\nabla u_0) + au - f = -\rho(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} u(x,y,t) = 0 \end{cases}$$

oú $-div(k\nabla u_0)$ est l'énergie perdu , et u_0 est le minimum de l'énergie, et f la force qui est à un instant initiale t_0 a été déplacé avec un vitesse u_0.

Si, on suppose que f n'est pas stationnaire et dépend du temps, on calcule la différence $f = M\gamma$ oú γ l'accélération de mouvement.

$$\begin{cases} -div(k\nabla u_0) + au - f = -\rho(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \; \Omega \times \mathbb{R}_+ \text{ equation deper} \\ u(x,y,t) = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u_0(x,y,0) = v_0, \; \dfrac{\partial u_0}{\partial t}(x,y,0) = v_1(x)y \end{cases}$$

remarque :

Le cas stationnaire n'est pas essentiel dans l'étude de mouvement de la membrane.

Si on fait des simplifications, on prend la densité égale à 1, $k = 1$ et $a = cte$, on obtient l'équation des ondes la plus simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

après ça , **Houdaifa** s'est interrogé sur la différence entre "k" et ”a” dans l'équation des ondes. Monsieur **Moussaoui** a donné une réponse complète avec plus de 5 minutes d'explication avec des exemples, on résume ici la réponse :

a : c'est la réaction de la membrane

k :c'est la déformation.

à la fin de la discussion **Moussaoui** a demandé de voir le théorème de l'indice d'**Atiyah-Singer**.

théorème :(Théorème de l'indice)

$$\left\{\begin{array}{r} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \triangle u = f \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_* \\ u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y);\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = u_y(x,0) \end{array}\right.$$

Cas particulier

Si, on prend $\Omega = \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{r} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+_* \\ u(x,0) = u_0(x);\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{array}\right. \tag{1}$$

l'idée de la solution est :

On remarque que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

On pose

$$v = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u,$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t v + c\partial_x v = f \\ v(x,0) = v_0(x) \end{array}\right. \tag{2}$$

(2) est une équation de transport, elle admet une solution définit comme suit :

$$v(x,t) = v_0(x-ct) + \int_0^t f(x - c(t)s), s)ds,$$

alors, on trouve une solution de (1) qui a donné explicitement sous la forme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+c(t)) + u_0(x-c(t))] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)dy$$

Conservation de l'énergie

$$\begin{cases} u^{"} - \triangle u = 0 \\ u(0) = u_0,\ u^{'}(0) = u_0 = v_1 \\ u_{|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+}} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

On a l'énergie

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 + |\nabla u|^2\right]dx$$

Supposons que nous avons une solution et qu'elle assez régulière pour faire une intégration par parties. Si on prend cette equation et en multipliant par u' , et on intègre par parties, on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)|^2 dt$$

$$\int_\Omega -\triangle u \frac{\partial u}{\partial t} = \int_\Omega \nabla u \frac{\partial}{\partial t}\nabla u$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

donc, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 + |\nabla u|^2\right] dx = 0.$$

Alors

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 + v_1^2,$$

donc l'énergie est conservée.

Un autre cas

Théorèmé 0.1 *Soit* $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *et* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, *alors il existe* u *une solution unique de (3) avec :* $u \in C^0(\mathbb{R}^+, H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty[, H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,+\infty[, L^2(\Omega))$

On suppose que Ω est un ouvert convexe, alors $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, et $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.
Si on prend une suite u_0^n qui converge vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$, et u_1^n converge vers u_0 dans $L^2(\Omega)$ $(u_0 \in H_0^1(\Omega),\ u_1 \in L^2(\Omega))$.
ça implique le théorème précédent,alors (u_0^n, u_1^n) converge vers (u^n est une solution régulière de (3), et u^n est de Cauchy dans $C^0([0,1[, H_0^1(\Omega)), C^0((0,T), L^2(\Omega))$.

Exercice

Étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_n) suivant

$$\begin{cases} u" - \triangle u = 0 \text{ sur }]0,T[\times\Omega \\ u(T) = u_0^n,\ u^{'}(T) = u_1^n \\ u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = 0, u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

théorème :
Soit $u_0 \in H^2(\Omega) \cup H_0^1(\Omega),\ u_1 \in H_0^1(\Omega)$, alors $u_R = u_D(x, T-t)$.

Une des propriétés des equations hyperboliques : la régularité des solution est la même régularité des condition initiale.
à ce moment là monsieur **Mokrane**, monsieur **Sadaallah**, et monsieur **Maraghni** sont entrés avec un visiteur qui est monsieur **Bahbouh**, le responsable de notre restauration.
Soit $Pu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ associée à une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$.
A est symétrique définie positive ou négative.
théorème :(Théorème de Schwartz)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

Le problème elliptique est indépendant de la condition initiale, ces valeurs propres sont de même signe.
Le problème hyperbolique : c'est le problème où les valeurs propres ne sont pas nuls mais de signe différent. **Haroune** a posé une question :"comment classifie les equations de 1^{er}

ordre ?

Monsieur **Zeghib** a donné des remarques géométriquement que les equations linéaires sont les champs de vecteurs et le cas elliptique se ramène au métriques riemanniennes.

Monsieur **Zeghib** a interrogé monsieur **Moussaoui** sur son type d'équation préféré.

Monsieur **Moussaoui** a répondu :

les equation elliptiques , sont très fréquentes .

les Paraboliques sont d'une certaine manière très riches.

les Hyperboliques sont très compliquées.

À 11 : 00 la première séance s'est terminée, et nous sommes sortis prendre une pause.

Après la pause-café monsieur **Mehdi** poursuit la correction du sujet d'agrégation qui porte sur le théorème de Nash.

dans cette séance, on pose beaucoup de questions, et il y a diverses interventions,car le sujet est très riche. **Haroune** et **Yassine** sont les plus attentifs car ils sont de spécialité analyse.

Monsieur **Mehdi** explique lors de cette séance la 3^{me} partie du sujet.

Le but de cette partie est de montrer que toute métrique de dimension d peut être approchée par une suite de métrique représentable

$X = [-\pi, \pi]^d$ et $L = Z^d$. Un polynôme trigonométrique est une fonction $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_l e^{\langle P,x \rangle},\ c_l \text{ complexe}$$

On note $X = [-\pi, \pi]$ et $L = \mathbb{Z}^d$.

On appelle polynôme trigonométrique toute fonction $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe une famille $(c_l)_{l \in L}$ des nombres complexes, nuls sauf pour un nombre fini d'indices l, pour laquelle

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ p(x) = \sum_{l \in L} c_l e^{\langle l,x \rangle}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique.

Pour tout entier positif m,J_m désigne l'intersection $\mathbb{Z} \cap [-m, m[$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : pour toute fonction continue F sur $X \times X$, on a

$$\left(\frac{\pi}{m}\right)^d \sum_{l \in J_m^d} F\left(x, \frac{l\pi}{m}\right) \to \int_X F(x, y) dy$$

quand m tend vers l'infini, uniformément par rapport à $x \in X$.

1. On montre par récurrence sur d que pour toute fonction continue $\bigwedge -$périodique

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C},$$

$$\int_X f(x-y)dy = \int_X f(y)dy \tag{4}$$

pour $d = 1$ $f : \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{C},\ 2\pi\mathbb{Z}-$périodique

pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x-y)dy = \int_{[x-\pi,x+\pi]} f(Z)dZ$$

$$= \int f(Z)dZ + \int f(Z)dZ + \int_{[\pi,x+\pi]} f(Z)dZ$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]} f(Z)dZ$$

On suppose que (4) est vraie pour $k = d-1$, et on le montre pour $k = d$.

Soit $f : \mathbb{R}^d \xrightarrow{C^0} \mathbb{C},\ 2\pi\mathbb{Z}-$périodique, grâce au théorème de Fubini, on peut faire une interversion des intégrales

$$\int_X f(x-y)dy = \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} \int_{[-\pi,\pi]} f(x_1-y_1, x_2-y_2, \cdots, x_i-y_i)dy_i)dy_1dy_2\cdots dy_{i-1}$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} f(x_1-y_1, x_2-y_2, \cdots, x_i-y_i)dy_1dy_2\cdots dy_{i-1})dy_i$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} f(x_1-y_1, x_2-y_2, \cdots, x_i-y_i)dy_1dy_2\cdots dy_i$$

$$= \int_X f(y)dy.$$

Donc pour tout d (4) est vérifiée.

2. Pour tout réel t et tout entier positif n,on pose

$$q_n(t) = (2+cost)^n,\ I_n = \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)dt$$

et on considère la suite p_n, de fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$p_n(x_1, \cdots, x_j) = \frac{1}{I_n^d} q(x_1)q(x_2)\cdots q(x_j)$$

a). On montre que, pour tout réel $\delta \in [0, \pi[$, on a

$$\frac{1}{I_n} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)dt \to 1$$

quand n tend vers l'infini.

On a

$$\frac{1}{I_n} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)dt = -\frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{-\delta} q_n(t)dt + \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)dt - \frac{1}{I_n} \int_{\delta}^{\pi} q_n(t)dt$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_n} \int_{\delta}^{\pi} q_n(t)dt &= -\frac{1}{I_n} \int_{\delta}^{\pi} (2+\cos t)^n dt \\ &\leq \frac{\pi - \delta}{I_n} (2+\cos t)^n dt \end{aligned} \tag{5}$$

d'autre part, pour $0 < \delta^{'} < \delta$ on a

$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)dt = 2\int_0^{\pi} q_n(t)dt \geq 2\int_0^{\delta^{'}} q_n(t)dt \geq 2\delta^{'}(2 + cos\delta^{'})^n$

donc

$$\tfrac{\pi-\delta}{2\delta'} \frac{(2+cos\delta')^n}{(2+cos\delta^{'})^n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

b). On montre que, pour tout fonction continue Λ-périodique $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, la suite (f_n) de fonction définie par

$$f_n(x) = \int_X p_n(y) f(x-y)dy$$

converge uniformément vers f.

$$f \ c.u \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ tq } |x-y|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

alors

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\int_X p_n(y) f(x-y)dy - \int_X f(x) p_n(y)dy| \\ &\leq \int_X p_n(y)|f(x-y) - f(x)|dy \\ = \int_{[-\delta,\delta]^d} p_n(y)|f(x-y) - f(x)|dy &+ \int_{X \setminus [-\delta,\delta]^d} p_n(y)|f(x-y) - f(x)|dy \leq \varepsilon \\ &\leq \varepsilon(2\varepsilon)^d + 2|f|_\infty \int_{X \setminus [-\delta,\delta]^d} p_n(y)dy \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon(2\delta)^d + 2|f|_\infty \left(\frac{2}{I_n}\int_\delta^\pi q_n(t)dt\right)^d \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc f_n converge uniformément vers f.

Dans ce moment **Haroune** a questionné "es-que $\int_X p_n(y)f(x-y)dy$ est un polynôme ?", monsieur **Mehdi** a répondu oui, il est un polynôme de fonctions trigonométriques.

L'espace vectoriel des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace vectoriel des fonctions continues $\wedge$-périodiques pour la norme de la convergence uniforme car

$$p_n = p_n * f = \int_{[-\pi,\pi]^d} p_n(y)f(x-y)dy = \int_{[-\pi,\pi]} g(y)dy = \int_{[-\pi,\pi]} p(x-y)f(y)dy.$$

oú

$$g(x-y) = p_n(y)f(x-y),\ g(y) = p_n(x-y)f(y)$$

c). On montre que, si f est de classe C^r, alors toute dérivée partielle de f_n d'ordre inférieur ou égal à r converge uniformément vers la dérivée partielle correspondante de f quand n tend vers l'infini.

$$\frac{\partial^{[k]} f_n}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_j^{k_j}} = \frac{\partial^{[k]} p_n}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_j^{k_j}} * f$$

$$\frac{\partial^{[k]} f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_j^{k_j}}$$

oú $k = (k_1, k_2, \cdots, k_j) \in \mathbb{N}^d$ et $[k] = \sum k_i$

Pour tout élément A de $M_d(\mathbb{R})$,on pose

$$\|A\| = \sup_{1\leq i,j\leq d} |A_{i,j}|.$$

On fixe un entier positif r et on note, pour toute application $M \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$,

$$\|M\|_r = \sup\left(\|M(x)\| + \sum_{\alpha=1}^d \left\|\frac{\partial^r M}{\partial x_\alpha^r}(x)\right\|\right)$$

Haroune et **Yassine** ont fait une discussion sur le lemme de Poincaré.

3. On montre que, pour toute métrique G de dimension d et tout $\varepsilon > 0$, il existe $D \in \mathbb{N}$,des éléments $y_1, ..., y_D$ de X, et des éléments $\mu_1, \cdots, \mu_D$ de $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à

valeurs strictement positives, tels que

$$\|G - \sum_{j=1}^{D} \mu_j G(y_j)\|_r \leq \varepsilon.$$

Avant de répondu a ce question **Yanni** s'est demandé si la matrice $\sum_{j=1}^{D} \mu_j G(y_j)$ est définie positive, Monsieur **Mehdi** a dit oui.

On prend $G_n = p_n * G,\ G_n \to G$ et

$$\frac{\partial^{[m]} G_m}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_j^{m_j}} \xrightarrow{c.u} \frac{\partial^{[m]} G}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_j^{m_d}}$$

$$G_{n,m}(x) = \left(\frac{\pi}{m}\right)^k \sum_{l \in J_m} G_j\left(\frac{\pi l}{m}\right) p_m\left(x - \frac{\pi l}{m}\right).$$

Soit

$$F : X \times Y \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{\pi}{m}\right)^d \sum_{l \in J_m} F\left(x, \frac{l\pi}{m}\right) \xrightarrow{c.u} \int_X F(x,y)dy.$$

On pose $F(x,y) = G(y)p_n(x-y)$, donc

$$\left(\frac{\pi}{m}\right)^d \sum_{l \in J_m} G\left(\frac{l\pi}{m}\right) p_n\left(x - \frac{l\pi}{m}\right) \xrightarrow{c.u} \int_X G(y)p_n(x-y)dy.$$

On prend $G_n = G * p_n = \int_X G(y)p_n(x-y)dy$, et $G_n \xrightarrow{c.u} G$, et

$$\frac{\partial^{[k]} G_n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_d^{k_d}} \xrightarrow{c.u} \frac{\partial^{[k]} G}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_j^{k_j}}$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ |G_{n,m} - G| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(|G_{n,m}(x) - G(x)| + \sum_{\alpha=1}^{d} \left| \frac{\partial^\alpha G_{n,m}(x)}{\partial x_\alpha^r} - \frac{\partial^n G(x)}{\partial x_\alpha^r} \right| \right)$$

$$|G_{n,m} - G|_\infty + \sum_{\alpha=1}^{d} \left| \frac{\partial^\alpha G_{n,m}}{\partial x_\alpha^r} - \frac{\partial^n G}{\partial x_\alpha^r} \right|_\infty$$

$$\leq |G_{n,m} - G|_\infty + |G_n - G|_\infty + \sum_{\alpha=1}^{d} \left| \frac{\partial^\alpha G_{n,m}}{\partial x_\alpha^d} - \frac{\partial^\alpha G_n}{\partial x_\alpha^r} \right|_\infty + \left| \frac{\partial^r G_{n,m}}{\partial x_\alpha^r} - \frac{\partial^\alpha G_(n)}{\partial x_\alpha^r} \right|_\infty < \varepsilon.$$

On pose $y_l = \frac{\pi l}{m}$, et $\mu_l = \left(\frac{\pi}{m}\right)^d p_n\left(x - \frac{\pi l}{m}\right)$, donc

$$|G - \sum \mu_l G(y_l)|_r < \varepsilon.$$

Quand **Mehdi** a fait la correction de cette question, Monsieur **Sadaaallah** est entré avec un autre visiteur qui était monsieur **Abdlhamid Otmani**,une journaliste d'echourouk.
Quelque temps après, monsieur **Mehdi** arrête la correction car c'était l'heure du déjeuner.

le rapport de l'après midi 15 aout 2017 écrit par DIAF Farid.

comme d'habitude nous nous somme retrouver à la salle de l'ENS à 14h15 après une petite pause de déjeuner ,les participants ont été partagés en deux niveaux .
niveau 1 :les étudiants de L1 suivent le cours des séries numériques avec monsieur Samir.
niveau 2 :les étudiants de niveau L2 et plus ont suivi l'exposé de Mohammed sur le théorème paradoxal de Banach Tarski un résultat troublant ,voir gênant pour le bon sens commun.le théorème affirme que deux boules de , et de rayon r et R resp sont equi-décomposable et on note $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$.
une autre façon de voire le théorème est de dire qu'on peut découper une boule de $\mathbb{R}^3$ en 5 morceaux de sorte qu'on peut recomposer ces morceaux pour avoir deux boules identiques à la première boule en tout point ; à noter que la recomposition ne fait intervenir que des isométries (déplacement,rotation) en particulier les pièces ne seront en aucun moment déformé.
16h30 :pause café.
17h10 :reprise avec un autre exposé de Bilal et Haroune sur les espaces de sobolev tout en introduisant la définition des espaces L^p et de la transformation de Fourier cet exposé a pour but de nous donner une petite idée sur ces notion pour attaquer la partie V du sujet d'agrégation d'analyse 1997 .
18h15 :d'habitude c'est la fin des cours mais Mehdi a insister de continuer la séance malgré la fatigue de la plupart des étudiants,pour cela une courte pause a était programmé pour pouvoir continuer.
18h 20 : Mehdi enchaine les questions 3,4,5 et 6 de la partie 3 du sujet d'agrégation dont le but de prouver que toutes métrique G de dimension d peut être approcher par une suite de métrique représentable .
19h30 : fin des cours .
20h : diner (tadjine zitoune).

Le mercredi 16 aout 2017 , matinée

c'était l'avant dernier jour du math camping et notre dernière séance avec Mr Moussaoui , Mr ZEGHIB m'a chargé d'écrire le rapport de la matinée, j'ai commencé donc a prendre des notes , a ce moment la

Mr MOHAND MOUSSAOUI a déjà commencé son cours par

citer certains ouvrages utiles concernant les EPDs et la physique

mathématique , il a cité :

- **J.NECAS , Méthodes directes en théorie des équations elliptiques**
- **MIKHAILOV ,MIR ,EDP**
- **F.TREVE , basics linears equations**
- **PROTTER WEINBERGER MAX PRINCIPALE IN D eq**

Avant de commencer le cours sur la régularité elliptique Mr Moussaoui nous a demandé d'essayer de comprendre le théorème de l'indice d'ATYAH – SINGER .

Il a commencé son cours en énonçant le théorème suivant :
soit $u \in L^2(R)$ supposant qu'il existe une Matrice symétrique définit positive $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ et des constante $b_{1,}b_2,\ldots,b_N, c$ tq :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

Alors $u \in C^{\infty}(R)$.

Ce théorème me semblait très puissant et étonnant c'était pareil pour mon ami DAHMENE qui était assit juste a coté de moi .

Apres on a parlé de quelques méthodes de résolutions des edps classique : équation de transport (de forme générale $\binom{a}{b}.\nabla u = f$) équation de chaleur de l équation d'ondes.

Une fois le cours de Mr Moussaoui terminé , Mr ZEGHIB a pris la parole pour parler d'un problème tres intéressant proposé par ABDERRAHIM , le problème était le suivant : étant donné une suite réelle $(a_n)_{n\in N}$ existe – t – il une fonction analytique f tel que $\forall\, n \in N$ *f(n)* =a_n . on a commencé par remarquer que pour une fonction continue c'est triviale , de même on peut le démontrer pour une fonction C^{∞} , mais c'était pas évident pour une fonction analytique .

Pour clôturer la séance de la matinée MR ZEGHIB posa une question a Mr Moussaoui sur ce qu'il aimait en dehors des math , il a répondu en souriant La poésie .

Rapport de la journée du 17 août 2017 (dernier jour) écrit par CHERIK Yenni.

Comme au premier jour nous nous retrouvons à la salle de conférence de l'ENS à 9 heure afin d'entamer cette dernière journée , cependant le léger retard de 4 filles de notre groupe a fait que la séance n'a finalement commencé qu'une demi-heure plus tard.
Au programme un bilan général du mathcamp3 .
La journée commence d'abord par un petit exposé que j'ai moi même présenté , comme convenu la veille avec monsieur Zeghib .
L'exposé consistait à mettre en avant le phénomène physique à l'origine de l'équation des ondes : $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, c \in \mathbb{R}$ qui est la version la plus simple de cette équation.
A la fin de mon exposé , monsieur **Zeghib** m'a questionné sur les considérations physiques requises pour obtenir les autres versions de cette équation , question à laquelle je n'ai pu répondre .
Puis **Rym** à commenté mon exposé en disant qu'elle trouvait que les suppositions faites étaient trop fortes et loin de la réalité .
Monsieur **Ainouz** , lui , en profite pour nous éclairer sur l'origine du nombre c qui se trouve dans l'équation ; il explique que le c signifie en fait "célérité" et que l'on pouvait expliquer cela par son unité de mesure ($c = \sqrt{\frac{d}{T}}$,d la densité linéique et T la tension) ; il ajoute que la détermination des unités de mesures est une étape importante de la modélisation mathématique .
La présentation se termine finalement sur une remarque négative de monsieur **Zeghib** sur le temps qu'a pris mon exposé . En effet j'avais initialement promis 5 minutes que j'ai finalement largement dépassé et je m'en suis excusé et je m'en excuse encore . (vous pouvez voir la source de mon exposé sur le lien suivant https://www.youtube.com/watch?v=ck-r_qmNNGO
Après cela , **Rym** se proposa également de faire une présentation du même style mais cette fois-ci pour l'équation de transport : $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,
promettant au passage de ne prendre que 10 minutes .
Suite à l'approbation de monsieur de Zeghib elle entama son exposé .
Le phénomène physique mis en avant cette fois est le transport d'un polluant (pétrole) dans une canalisation d'eau . Après moins de 5 minutes de présentation l'équation de transport est mise en place et l'exposé se termine sans plus de commentaire de l'auditoire(je ne connais pas la source de Rym , cependant cette vidéo devrait expliquer un peu le phénomène physique qu'elle a présenté https://www.youtube.com/watch?v=m3MgXLBfsUM) .
Ces deux exposés finalement terminés nous passâmes au sujet du jour .
Monsieur **Zeghib** nous questionne d'abord sur ce que l'on a retenu de ce mathcamp (c'est aussi à ce moment qu'il m'a demandé de prendre note des interventions des participants) .
Monsieur **Zeghib** commence par donner la parole à **Zakaria** ; ce dernier dit avoir compris l'importance de l'étude des groupes en mathématiques et plus particulièrement en géométrie .
Djamel prend la parole et dit être content d'avoir assimilé la notion "d'action de groupe"

qui lui était auparavant étrangère et d'avoir mieux saisi l'importance du groupe SO_3 .
Monsieur **Mehdi** avec l'humour qu'on lui connait affirme avoir appris l'importance du thé dans les études , faisant référence à nos quotidiennes " pauses cafés " . Il dit également avoir appris que **Soheib** était est un grand passionné de poésie . Il termine en parlant des métriques riemannienne et du cas particulier du tore .
Mhamed comprend mieux l'importance du théorème de Nash dont il n'avait qu'entendu parler auparavant ; il est aussi content des séances d'exercices sur la théorie des groupes avec monsieur Azzedine .
Puis viens le tour de **khaoula** qui avoue qu'elle ne connaissait pas grand chose à l'algèbre de façon générale mais que grâce aux cours de monsieur Azzedine elle a pu en apprendre un peu plus sur le sujet (en particulier l'étude des groupes)et elle souligne également l'importance des inclusions de Sobolev .
Quant à **Rym** elle dit avoir beaucoup appris du cours des surfaces de monsieur Larbi , notamment une bonne compréhension des définitions des formes fondamentales .Elle a aussi beaucoup aimé les exposés de Abderahim et de Zakaria sur les sous groupes de hall et la théorie de gallois .
Abderahim dit avoir bien compris les exercices qui traitaient de la simplicité de SO_3 et des groupes de Coexter et également avoir beaucoup aimé et saisi la notion de groupe fondamentale présenté par Hamza .
Mhamed a également souligné avoir beaucoup appris des séances de monsieur azzedine qui lui ont inculqué l'importance des groupes en géométrie .
Yassine remercie monsieur Mehdi pour sa présentation du théorème de Nash dont il avait seulement entendu parler sans rien en savoir tout comme l'équilibre de Nash , et il a aussi beaucoup apprécié les cours d'équations de la physique mathématique bien qu'il les ait étudié auparavant .
Hamza répond à Yassine à propos de l'équilibre de Nash en nous donnant une brève explication . **Mohahmed** commente cela en disant que c'est en fait le point fixe d'une fonction .
Monsieur **Zeghib** intervient dans la conversation et explique plus en profondeur l'équilibre de Nash .
c'est maintenant autour de **Billal** de donner son avis . Lui a assimilé les définitions faites en géométrie des surfaces et a également beaucoup apprécié le théorème de Nash et le paradoxe de banach-tarski ; il finit en disant être très surpris du niveau des participants ,selon lui relativement élevé et fait la comparaison avec ses camarades de Batna .
Houssam dit avoir bien suivi la 1^{ere} semaine de cours et avoir bien assimilé le sujet sur les formes symplectiques ainsi que l'exercice sur la simplicité de SO_3 . Il avoue néanmoins ne pas avoir pu suivre le changement de rythme de la seconde semaine en particulier le sujet de Mehdi sur le théorème de Nash.
Makaoui se contente de préciser qu'il a beaucoup apprécié les différentes interprétations géométriques des formes fondamentales .
Moqsit a aimé globalement le mathcamp mais n'a pas aimé étudier dans une salle de conférence ; il aurait voulu disposer de tables .

Constatant à quel point les étudiants étaient vagues dans leurs dires , monsieur **Samir** décide alors de reformuler la question de monsieur Zeghib et demande aux étudiants de citer la notion ou le théorème qui les a le plus marqué durant ces deux semaines de cours.

Hamza répond et se dit marqué par le théorème de Weierstrass présenté par **Rym** ainsi que le théorème de banach-tarski qu'a exposé **Mohamed** , ainsi que l'engendrement de$SL_2(\mathbb{Z})$.
C'est maintenant **Fatma** qui donne son avis en disant avoir beaucoup aimé la méthode de monsieur Azzedine ; elle a aussi apprécié le petit cours sur les espaces de Sobolev en le qualifiant de bonne révision (sachant qu'elle les avait déjà étudié) .
Affaf a beaucoup appris des cours de monsieur Azzedine et dit qu'elle ne connaissait rien aux actions des groupes avant ce mathcamp ; elle a également acquis de nouvelles notions en géométrie (1^{ere} et 2^{eme} forme fondamentale) et ajoute avoir beaucoup aimé les interprétions physiques du cours de monsieur Moussaoui .
Hamza remercie monsieur Samir pour les cours sur la convergence des séries .
On reprend avec l'intervention de **Zakaria** qui affirme avoir beaucoup appris de la correction du sujet sur les formes symplectique (réduction des matrices symplectiques) s'en suivit une légère interruption de monsieur Zeghib qui dit je le cite :" l'étude des formes bilinéaires alternées est parfaitement naturelle " .
Houdeyfa lui a dit avoir retenu les résultats d'analyse complexe vus dans les exposés de Rym et de moi-même insistant sur la force des théorèmes malgré la faiblesse des hypothèses . Il ajoute avoir beaucoup appris des cours sur les surfaces et des interprétations géométriques des actions des groupes .
Faysal quant à lui a apprécié la grande quantité d'exemples dans le cours des surfaces et a retenu surtout le principe de somme connexe ; il a également aimé l'exposé de Zakaria sur la théorie de gallois et finit en disant que malgré qu'il n'ait rien compris au cours de monsieur Moussaoui sur les EDP , il l'a tout de même écouté avec intérêt .
Houdeyfa reprend la parole en disant avoir bien compris le cours sur l'équation de la chaleur .
Retour sur **Faysal** qui conclut son intervention en parlant du théorème de banach-tarski en disant je le cite " dawakhni " pour exprimer son étonnement.
Vient le tour de **Maiza** qui nous parle de l'exercice sur l'engendrement de $SL_2(\mathbb{Z})$ ainsi que le théorème de Sylow et la formule de Burnside ; en ce qui concerne le cours des surfaces il dit qu'il aurait voulu des rappels sur les notions de courbure et de torsion .
Rym intervient en rappelant qu'elle a beaucoup aimé les travaux manuels avec les papiers fait dans le cours des surfaces.
Au tour de **Athmane** qui dit avoir préféré la 1^{1ere} semaine de cours notamment les exercices sur les groupes de Coexter et l'engendrement de $SL_2(\mathbb{Z})$, et il est également déçu qu'on ai pas eu le temps de faire l'exercice sur le groupe $GL_2(\mathbb{Z})$; il reconnait ne pas avoir suivi la présentation de Mehdi sur le sujet de Nash , mais a tout de même bien compris la philosophie du théorème .
Farid de même dit préférer la 1^{ere} semaine de cours , et la séance qu'il aurait le mieux saisi est la correction de l'exercice sur les groupes de coexter .
Monsieur **Rafed** toujours aussi rigoureux en langue interrompt Farid une petite minute

pour préciser que Coexter se prononce en fait " coxter " et que le "e" du milieu est muet .

Farid reprend en parlant du théorème de Weierstrass et de la présentation de Hamza sur le point fixe de Brower .

Monsieur **Zeghib** intervient à son tour pour nous donner quelques informations sur les groupes de coexter et nous parle des groupes de cristallographie et explique rapidement la notion de réseaux .

Dahmane s'exprime sur le mathcamp en disant que s'il n'avait pas eu lieu il n'aurait absolument rien fait d'autre chez lui ; il continue en disant avoir beaucoup appris des cours de monsieur Larbi sur les surfaces et a aimé les séances d'exercice de monsieur Azzedine et a aussi apprécié la partie du cours de monsieur Moussaoui qui parle de la régularité des solutions d'une EDP . Il a également beaucoup appris du sujet sur le théorème de Nash ; il conclut en disant avoir aimé tout les exposés des étudiants et certains étaient nouveaux pour lui .

Adam lui parle des cours de monsieur Azzedine en disant trouver très intéressants les petites interventions et les questions des étudiants et des enseignants ainsi que les débats qui ont suivi ces interventions ; il remercie également monsieur Samir pour ses cours .

Houari dit qu'il a beaucoup appris des interprétations géométriques de monsieur Azzedine lors de ces séances et a également appris énormément des exposés de ses pairs .

Oussama avoue n'avoir pas pu suivre tout au long de la 1^{ere} semaine le cours sur les surfaces , et ce serait dû selon lui à sa méconnaissance de la topologie et du calcul différentiel , mais a tout de même pu suivre les cours de monsieur Azzedine .

Soheib lui , adore toutes les séances de cours ainsi que tout les exposés des étudiants et trouve très intéressantes les interventions de monsieur zeghib , et il parle aussi du fait que les polygones soient des surfaces selon la définition vue en cours en revenant au cas particulier du carré .

Monsieur **Zeghib** commence à donner quelques explications sur les polygones puis nous parle des sous-variétés de dimension 1 .

Souheib reprend et conclut en qualifiant la présentation de Moqsit de très intéressante .

C'est au tour de monsieur **Samir** de prendre la parole et il dit être agréablement surpris par les exposés des étudiants et demande à ce que ce soit réitéré pour le prochain mathcamp .

Après ce commentaire de monsieur Samir il y a eu une pause café .

La pause terminé c'est monsieur **Rafed** qui prend la parole et nous demande de faire des suggestions pour réussir à améliorer les mathcamp à venir . Il nous explique qu'il est dans notre intérêt d'améliorer notre niveau en math pour pouvoir espérer un jour avoir l'honneur de participer comme monsieur Zeghib au développement des mathématiques modernes , Il est également désolé de la situation des chercheurs algériens qui la plupart du temps font des publications médiocres dans un intérêt purement financier . Monsieur **Rafed** dit aussi être attristé par la faible contribution des chercheurs algériens au niveau mondial .

Ensuite monsieur **Rafed** reviens sur le sujet de notre formation , il nous explique que lire

beaucoup de livres et faire beaucoup d'exercices n'est pas suffisant pour devenir un bon mathématicien . Il faut également essayer d'avoir de l'intuition et de sentir les théorèmes venir , et pour gagner en intuition il nous faut absolument " un maitre en la matière" qui puisse nous transmettre son expérience acquise après des années d'études très poussées . Et selon lui le plus à même d'assumer ce rôle est incontestablement monsieur zeghib , et sa présence est une chance que nous devons absolument saisir .
Monsieur **Zeghib** l'interrompt en disant qu'il a eu lui même beaucoup de chance en rencontrant messieurs Gromov et Ghys et qu'il estime normal de nous faire profiter de son expérience.
Monsieur **Rafed** reprend la parole en donnant l'exemple du mathématicien Arnold qui a étudié de près la théorie de Galois et qu'il a transmis ses connaissances à son élève qui par la suite a écrit un livre sur le sujet . Enfin monsieur **Rafed** nous demande de prendre exemple sur la relation entre Arnold et son étudiant .
il s'en suit des applaudissements .
Dahmane intervient en notant que monsieur Zeghib est notre " condition nécessaire " pour organiser un mathcamp .
Monsieur Zeghib intervient et exprime sa tristesse de ne pas avoir de confrères algériens au sein du CNRS et qu'il aimerait que les choses changent .
Zakaria invite tous les participants à prendre exemple sur Zeghib afin d'aider à notre tour les futurs étudiants .
Monsieur **Zeghib** approuve en disant même que c'est une responsabilité d'aider les nouveaux étudiants .
La conversation s'est arrêtée là avec l'entrée de monsieur malik talbi qui nous a été présenté par monsieur Zeghib ; entrée qu'on a salué avec des applaudissements.
Applaudissements tout à fait légitimes étant donné qu'il est l'entraineur de l'équipe algérienne qui participe aux olympiades de mathématique .
Puis monsieur Zeghib fait un bref récapitulatif du mathcamp à monsieur Talbi en lui présentant les étudiants et les enseignants .
Durant ce récapitulatif monsieur **Zeghib** mentionne le sujet d'agrégation présenté par monsieur Mehdi le qualifiant de très difficile ; il nous apprend au passage que monsieur Talbi est lui même agrégé de mathématiques et aussi un ancien de l'ENS de Lyon .
Après cela , monsieur **Zeghib** continue avec une description des cours d'algèbre de monsieur Azzedine .
A ce moment là monsieur **Talbi** l'interrompt et demande si on a parlé de $SL_2(\mathbb{Z})$ durant les cours d'algèbre .
La réponse à sa question étant positive il nous pose un problème :
étant donné $P \subset \mathbb{Z}^2$, avec P finie et $\forall (x, y) \in P, x\Lambda y = 1$.
montrer alors qu'il existe un polynôme homogène f tel que $f_{|P} = 1$.
Spontanément **Mohamed** dit pouvoir résoudre le problème en utilisant le binôme de newton ; il explique son idée mais monsieur **Talbi** lui montre rapidement son erreur .
S'en suit une explication de monsieur **Talbi** d'une méthode pour résoudre le problème . Monsieur **Zeghib** termine cette conversation en faisant le lien entre ce problème et la construction du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Monsieur **Zeghib** parle maintenant d'un problème posé par Abderahim qui ressemble au théorème de Weierstrass .
$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$, $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analytique tel que $f(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$.
Monsieur **Zeghib** donne ensuite une piste pour résoudre le problème qui fait appel à l'équation de la chaleur (les solutions de l'équation de la chaleur étant analytique).
Mehdi prend maintenant la parole et relance le sujet du développement de l'intuition mathématique chez les étudiants puis se lance avec messieurs Rafed , Zeghib et Talbi dans une discussion concernant l'intuition géométrique des actions des groupes comme $SL_2(\mathbb{Z})$.
Monsieur **Talbi** conclut la discussion en disant qu'il espère voir l'un de ses élèves assister au mathcamp suivant pour expliquer l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le plan hyperbolique .
Juste après cela **Mustapha** questionne monsieur Talbi sur sa possible participation aux olympiades de mathématiques, monsieur Talbi le renvoie plutôt s'informer auprès ses camarades qui y ont déjà participé .
Monsieur **Zeghib** entame un nouveau sujet en demandant des critiques au participants du mathcamp ; il commence lui même en suggérant de ne pas encombrer les cours de notions mathématiques selon lui inutiles en donnant l'exemple des espaces de Sobolev .
Puis intervient **Rym** qui trouve que le programme de la 1^{ere} semaine est mieux structuré que celui de la 2^{eme} semaine et qu'il fallait prendre cela en compte pour le prochain mathcamp et ajoute aussi que les cours devraient être plus interactifs comme celui de monsieur Azzedine .
Après cela monsieur **Zeghib** souligne l'importance des exposés des étudiants pour notre formation .
Rym lui répond aussitôt et demande à ce que les exposés soient moins longs car selon elle l'auditoire s'y perd après plus d'une heure de présentation .
Yassine approuve et conseille aux participants d'essayer de ne donner que l'essentiel lorsqu'ils exposent .
Monsieur **Samir** les désapprouve aussitôt et explique que les exposés faisaient partie de la formation des étudiants et qu'il faut donc les laisser s'exprimer et même faire des erreurs ; il ajoute aussi que les exposés devraient se faire l'après midi .

La séance de critiques est interrompue par l'arrivée de quelques invités qui rendent hommage aux efforts de monsieur Zeghib pour l'aide qu'il fournit aux étudiants algériens . Ils offrent également un cadeau à monsieur Talbi pour sa contribution aux olympiades de mathématiques .
La journée se termine finalement dans la bonne humeur avec une photo de groupe et l'espoir d'une prochaine rencontre à El Oued .