MATHCAMP 2016
RAPPORT SCIENTIFIQUE

ABDELGHANI ZEGHIB

Le MathCamp-2016 s'est tenu à Annaba du Mercredi 20 Juillet au Samedi 6 Août, approximativement comme annoncé ! Le présent rapport porte essentiellement sur le volet scientifique ; d'autres rapports, faits par des participants, portant plus sur le côté social, paraitront prochainement.

Participants. Une grande partie des participants est arrivée le mercredi 20 Juillet. La majorité est restée jusqu'au dernier jour sauf quelques uns qui rentraient de voyage ou étaient occupés par leur inscription à l'université.

Les participants étaient : – Abdelmoksit Sagueni, Fayssal Saadi, Houssem Boukhechem et Souheib Allout (1ère année, Math-Info, USTHB) ; – Houdheifa Labbi (1ère année, Math-Physique, Montpellier) ; – Malek Hanouna et Younes Benyahia (2ème année, lycée de Maths- Kouba) ; – Aymen Zidane (1ère année, lycée El Oued) ; – Mazigh Lahiani (Terminale, lycée Bejaia) ; – Bilal Guelmame et Haroun Houamed (Master 1 à Batna, partant en M2 à Nice) ; – Ahmed Blidia (M2 à Nice) ; – Aissa Meliani et Yassine Tahraoui (Magister ENS-Kouba) ; – ainsi qu'une participation irrégulière de quelques auditeurs locaux.

Cours. On a campé et travaillé les 3 premiers jours dans l'appartement d'accueil (tous ensemble). Les cours en salles ont démarré le samedi 23 et se sont étalés sur 2 semaines, tous les jours sauf le vendredi, et ce jusqu'au Samedi 6 Août (compris). Les cours du matin sont de 9H à 12H30 et ceux de l'après midi de 14H30 jusqu'à 18H, ou parfois 16H30. Ils se sont passés dans les locaux de l'école privée "El Tahadi" qui se trouve au quartier dit "les Allemands".

Hétérogénéité ! Le défi était de garder tous les élèves ensemble, ou au maximum en 2 groupes et de leur proposer quelque chose qui convient à tout le monde en dépit de leur divergence de niveau (du lycée au master). Les élèves sont d'un très bon niveau, et nous avons estimé qu'un choix judicieux de sujet pourrait faire l'affaire : on commence par les rudiments, et on avance pas à pas jusqu'à poser des questions ouvertes (à leur niveau).

Date: 18 août 2016, version préliminaire.

Exercices "de haut vol". Durant les quelques premiers jours, on proposait des feuilles d'exercices de type olympiades, à deux niveaux, universitaire et secondaire, voir fichiers ExosTop1 et ExosTop2.

Ces exercices ont crée une grande ambiance de travail et réflexion, et ont occupé tout le temps des élèves (durant les premiers jours) au point de s'empêcher volontairement d'aller se promener sur la corniche ! Une autre Feuille de TD a été distribué et corrigée ultérieurement (elle correspond à un TD de prépa MPSI).

Groupe de lecture "géométrie". Notre choix a porté sur le livre "géométrie" édité par le groupe "Exo7" (voir le site). Ce livre est teléchargeable ici.

J'étais très enthousiaste à ce choix et j'ai demandé aux participants leur avis. Une semaine plus tard, ils ont avoué que leur appréciation a évolué progressivement avec le temps et ce n'est qu'après avoir parcouru une bonne partie du livre qu'ils ont estimé que son choix était particulièrement pertinent !

J'ai joué le rôle de chairman et commentateur et beaucoup d'autres participants ont exposé des parties du livre. On a fini par faire tout le livre sauf le dernier chapitre qui porte sur le GPS (qui est en fait mathématiquement le plus léger). Les chapitres faits sont donc : – Constructions géométriques à la règle et le compas ; – Inversion, – La chainette ; – Systèmes itérés de fonctions.

Cours sur les séries. Azzedine a dispensé un cours (étendu sur des longs après-midis) sur les séries basé sur deux sujets de concours d'entrée (aux grandes écoles en France) : Sujet 0 et Sujet 1. Pour les jeunes, on estime qu'au moins les notions de : limite d'une suite, $\sup$ et $\inf$ d'une partie, et suite de Cauchy, ainsi que quelques subtilités sur les séries numériques, ont été assimilées. Le cours a touché aux suites de fonctions, convergence simple et uniforme, convergence absolue, séries de Fourier et séries entières. Beaucoup de techniques de démonstration et astuces de calcul ont été introduites, permettant en particulier de calculer deux valeurs de la fonction Zeta de Riemann $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, où $\zeta(z) = \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z}$.

Autres exercices, énigmes. Au cours du camp, une feuille d'exercices (extraite du site Exo7) ainsi qu'une feuille d'énigmes (envoyée par Mehdi de Rio) ont été distribuées. En voici une supplémentaire : *montrer qu'un sous ensemble infini de points du plan dont toutes les distances mutuelles sont des entiers, est contenu dans une droite.*

Exposés. Indépendamment de la lecture du livre d'Exo7, certaines conférences par des étudiants de 1ère année universitaire ont été prévues de longue date, mais finalement seule celle sur les fractions continues a été assurée par Abdelmoksit, qui s'est très bien passée.

- *Fractions continues.* Le nombre d'or $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifie $x = 1 + \frac{1}{x}$. En réinjectant cette égalité au dénominateur, on obtient : $x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Ainsi, en répétant l'opération, on obtient que x admet un développement en fraction continue $[1, 1, \ldots, 1 \ldots]$. On se demande *inversement quelle qualité a un nombre du genre* $[n, n, \ldots, n \ldots]$, *en particulier,* $n = 2$ *?* Ce développement en fraction continue du nombre d'or permet de le calculer da façon approchée, ce qui nous a conduit *à se demander si l'on sait calculer* $\sqrt{n}$, *pour* n *entier, e.g.* $n = 2$ *?*. Aymen s'est rappelé une méthode qui marche pour n carré parfait, les plus savants ont parlé de la méthode de Newton.

On a été émerveillé d'apprendre que e, en dépit de sa transcendance, admet un développement en fraction continue "déterministe"

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2k, 1, 1, 2(k+1), \ldots]$$

À la fin, le conférencier a noté la propriété d'approximation par les rationnels suivante. Si l'on veut approcher un réel irrationnel x par un rationnel sous forme irréductible $\frac{p}{q}$, nécessairement q devient grand quand $|x - \frac{p}{q}|$ est petit. La fraction continue associe à x une suite de rationnels $r_n = \frac{p_n}{q_n}$. Cette suite vérifie le fait que parmi tous les rationnels $r = \frac{p}{q}$ qui satisfont $q \leq q_n$, r_n est le plus proche de x : $|x - r_n| \leq |x - r|$. Plus généralement, on peut envisager une suite de rationnels canonique $(R_k(x))$ approximant x, où par définition $R_k(x)$ minimise $|x - r|$ lorsque r parcourt les rationnels $r = \frac{p}{q}$ avec $q \leq k$ (Remarquer que $R_k(x)$ est unique que x soit rationnel ou irrationnel). La fraction continue détermine donc une sous-suite extraite (*qui peut être très peu dense*) de $(R_k(x))$: $R_{q_n}(x) = \frac{p_n}{q_n}$.

- *Transcendance de* e. Un exposé sur la transcendance de e a été préparé et donné par Bilal et Haroun, la preuve dans cas de π, qui est une extension de celle de e, n'a pas été achevée. L'exposé était très bien fait, mais c'est de l'analyse, on comprend localement, mais on a eu du mal à localiser l'instant dramatique du dénouement où l'on voit éclater la contradiction ; quelle est en fait la définition de e qu'on a vraiment utilisé ? Quant à la relation entre e et π, on l'a bien comprise : $e^{i\pi} = -1$! On a ensuite présenté les nombres de Liouville et la preuve de leur transcendance suivie de compléments sur l'approximation diophantienne.

- *Résolution des équations algébriques.* Enfin, Aymen a exposé sur la résolution des équations polynomiales de degré 3 et 4. La méthode est très laborieuse, ça provoque un sentiment de pitié pour ceux qui avaient essayé le cas du degré 5, avant Galois !

Quelques notions évoquées, en vrac. Pour les lycéens, nous pensons que l'apport conceptuel principal était de voir leurs ainés manipuler, en profitant de toute occasion pour leur faire la digression qu'il faut, des notions de structure, e.g. relations d'équivalence, relations d'ordre, corps, espace métrique..., mais également en analyse des notions de $\sup$, $\inf$, suite de Cauchy...

Ces rappels n'ont pas apparement ennuyé les universitaires (niveau L1 et même M1) puisqu'on a évoqué la construction des nombres réels et introduit des espaces métriques, gros comme des espaces fonctionnels, e.g. l'espace des compacts du plan muni de la distance de Hausdorff. Pour trouver les attracteurs de systèmes itérés de fonctions, on a parlé du théorème (de Banach) du point fixe des applications contractantes, qui motive l'introduction de à la notion de complétude.

- *Cantor.* On s'est régalé des exemples de fractals : ensemble de Cantor, Courbe de Von Kokh, et triangle de Sierpenski. La dernière séance était consacrée à la dimension de Hausdorff.

L'ensemble de Cantor classique (triadique) est l'exemple paradigmatique d'espaces compacts totalement discontinus (i.e. ne contenant aucun intervalle ouvert dans le cas de parties de $\mathbb{R}$) et sans point isolés (i.e. tout point est limite d'une suite de points différents). On a donné des éléments de la preuve du fait que tous ces ensembles de (type) Cantor sont homéomorphes entre eux, et dans le cas de parties de $\mathbb{R}$, l'homéomorphisme peut-être induit pas un homéomorphisme global de $\mathbb{R}$.

On a constaté que la construction de l'ensemble de Cantor classique ne fait plus partie de la culture des "matheux actuels" ; il y a même certains qui pensent que tout ensemble de type Cantor est de mesure de Lebesgue nulle ! (tout ouvert U est réunion disjointe d'une suite d'intervalles ouverts, et Leb(U) est la somme des longueurs de ces intervalles et pour un compact $F \subset [a,b]$, Leb$(F) = (b-a) -$Leb$([a,b] \setminus F)$. On a décrété qu'on n'invitera pas à un futur MathCamp quelqu'un qui ne connait pas l'ensemble de Cantor (mais comme on n'est pas sectaire, on exigera également la récitation par coeur des formules de a_n et b_n dans le développement en série de Fourier) !

- *La chainette.* A propos du chapitre sur "la chainette", on a constaté que nous ne comprenons pas encore (ou qu'on n'a peut-être jamais compris) la notion de "tension d'un fil" (on ne prétendra donc pas participer un jour à un Physique-camp) ! J'ai personnellement trouvé refuge dans le formalisme des "espaces de configuration" qui conduira à une chainette discrétisée : on approxime une chainette par un système articulé, une ligne brisée de longueur l, à extrémités fixées, et constituée de $(N+1)$ segments rigides de longueur $\frac{l}{N+1}$ attachés l'un à l'autre. L'espace de configuration d'un tel système est un sous espace Conf $\subset (\mathbb{R}^3)^N$ de dimension $2N$. Toute la physique et donc la dynamique du système sont encodées dans la métrique riemannienne induite d'un produit scalaire naturel sur $(\mathbb{R}^3)^N$. Le mouvement sous l'effet du poids correspond à un système mécanique naturelle sur Conf. La chainette discrétisée correspond à un point d'équilibre. Tout cela aide à modéliser la chainette continue, en faisant tendre $N \to \infty$; en revanche la solution de la chainette continue parait plus simple à obtenir que celle de la chainette discrétisée ! On peut s'amuser *à chercher la forme de la chainette discrétisée, pour* $N = 2, 3, 4, ...$ (rappelons que les points d'attache de la chainette ne sont pas nécéssairement à la même altitude).

On s'est posé la question si la chainette n'est pas solution d'un problème d'optimisation, ce qui nous a conduits a parler de la lemniscate de Bernoulli, là, on a invoqué le Jardin des courbes de Hamza Khelif, lui qui n'a pas pu participer au camp de cette année, dans l'espoir qu'il nous viendra l'année prochaine avec l'équation des branches du palmier !

À l'occasion, on a également parlé du principe de moindre action, des équations d'Euler-Lagrange, ainsi que d'une version $2D$ de la chainette : quelle est la forme d'un drap tendu, en des points de son bord, par 4 personnes ou plus ? Mais nos connaissances collectives en physique et EDP ne nous ont pas permis d'aller plus loin. En revanche, on a eu une discussion plus rigoureuse sur le problème de Steiner

- *Construction à la règle et au compas.* Le premier chapitre était celui le plus investi : notion de sous-corps de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), extensions, espaces vectoriels, nombres algébriques, extensions quadratiques...

Mais le plus important était de voir comment formaliser mathématiquement le problème de construction géométrique à la règle et au compas ? Comment démontrer que la quadratique du cercle est impossible : étant donné un cercle dont le rayon est l'unité de mesure, il n'est pas possible de construire à la règle et au compas un carré ayant la même aire (donc de longueur de côté $\sqrt{\pi}$) ! Cela ressemble à l'impossibilité de "résoudre" les équations de degré 5 ou plus ; comment modéliser, ici algébriser, le problème ? Rappelons que ça marche comme suit, on définit $\mathcal{C}_{cr}$ une application qui à une partie X du plan, associe une autre partie $\mathcal{C}_{cr}(X)$ (comme un système dynamique !). Cette partie $\mathcal{C}_{cr}(X)$ est une expansion de X au sens qu'elle contient X, et exactement tout point intersection de : - deux segments joignants des points de X, – ou intersection d'un segment joignant deux points de X et un cercle de centre $\in X$ et passant par un point de X, — ou enfin intersection de deux tels cercles. Ensuite on itére : $\mathcal{C}_{cr}(X)$, $\mathcal{C}_{cr}(\mathcal{C}_{cr}(X))$...,$\mathcal{C}_{cr}^n(X)$, et on considère $\mathcal{C}_{cr}^\infty(X) = \cup_n \mathcal{C}_{cr}^n(X)$.

Le cas classique est celui où $X = X_0 = \{0, 1\}$, le segment ainsi défini jouera le rôle d'unité, et l'on se demande quel est l'ensemble des points constructibles, i.e. $\mathcal{C}_{cr}^\infty(X_0)$, ou l'ensemble des nombres constructibles, i.e. $\mathcal{C}_{cr}^\infty(X_0) \cap \mathbb{R}$? Par exemple, pourquoi $\mathcal{C}_{cr}^\infty(X_0)$ n'est-il pas tout le plan. Ceci nous a conduit à discuter de la notion de démontrabilité. On a ensuite présenté la preuve du théorème de Wantzel qu'il a démontré en 1837, à l'âge de 23 ans ! Pour ceux qui souhaitent consolider leur compréhension de ce théorème nous proposons d'en démontrer une version en partant d'un ensemble initial $X_1 = \{0, 1, x\}$, histoire d'avoir deux unités !

- *Compas seul !* Un exercice redoutable de ce premier chapitre demande de construire le milieu d'un segment à l'aide du compas seul. En d'autres termes, on considère cette fois l'expansion $\mathcal{C}_c$, où l'indice c réfère au "cercle" (et le "r" à la règle). Ce problème sera traité au chapitre 2 où il y est prouvé de manière surprenante que $\mathcal{C}_{cr}^\infty = \mathcal{C}_c^\infty$. En fait, la construction du milieu d'un segment contient l'essentiel des difficultés du problème. On y a passé beaucoup de temps, mais elle a résisté ; seul Fayssel a continué a se battre avec, de longues heures de jour comme de nuit, pour enfin la trouver le lendemain matin. Cette Solution ici, parait indépendante de la solution générale du problème, on ne prétend en fait aucune originalité dans les textes ci-attachés, sauf celui ci !

Pour aller plus loin, *on peut se demander quelle est la complexité de la construction, i.e. le nombre minimal d'étapes nécessaires pour construire le milieu du segment à l'aide du compas seul.* On peut également se demander *si l'on remplace le cercle par un autre élément du jardin des courbes, qu'obtient-on ?* Enfin, *et si l'on remplace le plan Euclidien par le plan hyperbolique ?...*

Le chapitre 2 porte sur l'inversion, la plus simple des transformations géométriques non-linéaires. On a débordé en approfondissant la discussion sur le mécanisme de Peaucellier. On a raconté que les homographies préservent l'ensemble des cercle-droites, et on s'est posé la question (encore non-résolue) de la réciproque, *précisément quelles transformations du plan préservent les cercle-droites ?*

Remarques. À l'image de la société et de l'université Algériennes, on a parlé (et écrit) un mélange d'Arabe et de Français. Il aurait été certainement plus beau d'alterner les langues entre conférences, mais que chacune soit dispensée en une unique même langue, ou même qu'une même conférence soit partitionnée en une première partie en une langue et une seconde (ou même encore une tierce) en une autre, pour ainsi garder un bon niveau littéraire. Il n'est cependant pas question d'être monolingue ; l'idéal étant d'être trilingue !

DM. Les lycéens sont partis avec l'engagement de finir et rédiger les solutions de tous les exercices du fichier ExosTop1, ainsi que de relire les chapitres 1 et 2 du livre "géométrie' et de faire tous leurs exercices. Il est vrai qu'il y a des notions d'algèbre qui sont du niveau Bac+2, mais la motivation est là pour approfondir les débats qu'on a eu sur ces notions universitaires : corps, extension, nombre algébrique, relation d'ordre, relation d'équivalence...

Tous les autres sont invités de revenir sur tous les chapitres lus (soit tous sauf le dernier) et de faire leurs exercices. Ils sont appelés à diffuser la culture sur les "constructions géométriques et leur algébrisation" qu'ils ont acquise dans leur entourage aussi bien à l'université qu'au lycée. Ils sont en outre partis avec quelques devoirs à domicile qui sont d'anciens sujets de concours d'entrée aux écoles ENS et Centrale, ainsi qu'un devoir sur les points de continuité des fonctions, élaboré par Azzedine. Ce DM sur le théorème de Baire serait un approfondissement des cours de topologie du niveau L2 et L3, et j'ai donc préconisé aux étudiants L1 de le garder pour les longs mois à venir. J'ai été surpris d'apprendre que quelques fans de topologie parmi eux ont déjà complètement fait ce DM ! C'est dire que ce genre de DM pourrait s'avérer efficace pour consolider et approfondir des connaissances éparpillées. C'est intéressant comme méthode dans notre cas puisqu'on essaie de monter une formation d'excellence avec les moyens du bord.

Projet. Nous ne donnons pas ici d'évaluation de cette rencontre, mais estimons qu'il serait très intéressant de la réitérer sous une forme améliorée du point de vue organisation. Pour cette première édition de démarrage, on n'était sûr de rien, ni de nos moyens, ni de la participation des intéressés, ce qui explique notre prudence à diffuser l'information ; nous avions préférée lancer l'expérience et ensuite la proposer à la communauté. Pour le futur, nous appellerons à la constitution d'un comité d'organisation sous forme d'une association ou sous la tutelle d'une association existante qui se chargera particulièrement d'une telle rencontre, entre professeurs volontaires et un groupe entre 10 et 20 étudiants du meilleur niveau possible, du lycée au doctorat, pour une durée de 2 à 3 semaines. Cette structure peut également s'occuper de l'organisation de voyages scientifiques de jeunes talentueux pour participer à des manifestations scientifiques à travers le monde.

E-mail address: abdelghani.zeghib@ens-lyon.fr
http://perso.ens-lyon.fr/zeghib/